

М.А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, А.И. ПЕРОВ,
А.И. ПОВОЛОЦКИЙ, П.П. ЗАБРЕЙКО

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

517.2
К 78

АННОТАЦИЯ

Книга посвящена важному геометрическому методу анализа и его приложениям к разным задачам алгебры многочленов, теории функций, теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ряд существенных результатов принадлежит авторам книги.

Книга может быть рекомендована студентам физико-математических специальностей, аспирантам, научным работникам, интересующимся различными нелинейными проблемами. Она может также служить введением в круг идей и методов интенсивно развивающегося в настоящее время нелинейного функционального анализа.

ПРЕДИСЛОВИЕ

При изучении математических объектов наиболее часто используются такие их характеристики, которые могут принимать любые числовые значения из некоторых промежутков (значение функции в точке, мера множества, длина вектора и т.д.). Однако не менее важную роль играют дискретные (например, целочисленные) характеристики. Одной из них — вращению плоского векторного поля на замкнутых кривых — посвящена эта книга.

Методы, изложенные в книге, восходят к Коши. Дальнейшее их развитие связано с именами Пуанкаре, Брауэра, Боля и др. Эти методы играют существенную, а иногда и определяющую роль в разнообразных нелинейных проблемах.

В книге изложены приложения теории плоских векторных полей к теоремам существования решений у систем уравнений, к задаче о расположении корней многочлена, к исследованию особых точек и периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений, к изучению критических точек гармонических и псевдогармонических функций, к осцилляционным теоремам, к двухточечной краевой задаче и др.

Книга рассчитана на читателя, владеющего лишь основами математического анализа. Поэтому в ней не нашли отражения обобщения теории плоских полей на многомерный и, тем более, бесконечномерный случай с приложениями к вариационному исчислению, математической физике, нелинейным интегральным уравнениям, функциональному анализу и т.д. Отметим, что для этих приложений важны не только обобщения теории плоских полей, но и сами плоские поля.

Книга может служить введением в более сложные разделы математики, связанные с приложениями топологических методов в анализе.

В основу книги положен спецкурс, прочитанный М.А. Красносельским в Воронежском университете, и ряд докладов и работ, прочитанных и выполненных в воронежском семинаре по функциональному анализу.

При окончательной подготовке книги учтены замечания и ценные советы А.Д. Мышкиса, который взял на себя труд внимательного ознакомления с рукописью. Авторы пользуются приятной возможностью выразить ему свою искреннюю благодарность.

Авторы

Воронеж, 1961

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Вращение векторного поля	1
§ 1. Угловая функция	1
1.1. Векторное поле	1
1.2. Угловая функция	2
1.3. Вращение поля	3
1.4. Формула Пуанкаре	5
1.5. Вычисление вращения	6
§ 2. Векторные поля на замкнутых кривых	8
2.1. Замкнутые кривые	8
2.2. Вращение и угловая функция	9
2.3. Формула Пуанкаре	12
2.4. Об одном признаке отличия вращения от нуля	12
2.5. Нечетные поля	13
2.6. Поле касательных	14
§ 3. Особые точки векторного поля	16
3.1. Вращение на границе многосвязной области	16
3.2. Вращение поля без нулевых векторов	17
3.3. Особая точка и ее индекс	18
3.4. Теорема об алгебраическом числе особых точек	19
3.5. Продолжение векторных полей	21
3.6. Продолжение без нулевых векторов	22
§ 4. Гомотопные векторные поля	24
4.1. Определение гомотопности	24
4.2. Основная теорема	24
4.3. Обратная теорема	25
4.4. Признаки гомотопности	26
4.5. Векторные поля, близкие к нечетным	27
4.6. Вращение на границе произвольной области	28
4.7. О векторных полях на двумерных многообразиях	29
4.8. Произведение вращений	31
4.9. Устойчивость особой точки	32
§ 5. Порядок точки и степень отображения	33
5.1. Порядок точки относительно образа границы	33
5.2. Порядок точки относительно локально простой кривой	35
5.3. Степень отображения на окружность	38
5.4. Локальная степень отображения	39
5.5. Степень отображения области	40
5.6. Угловой порядок локально простой кривой	42

5.7.	О вращении разрывных полей	47
Глава 2.	Индекс особой точки	48
§ 6.	Векторные поля с главной линейной частью	48
6.1.	Вычисление индекса по главной части поля	48
6.2.	Линейные поля	50
6.3.	Вычисление индекса по линеаризованному полю	51
6.4.	Асимптотически линейные поля	53
§ 7.	Векторные поля с вырожденной линейной частью	53
7.1.	Общая формула	53
7.2.	Вычисление индекса	55
7.3.	Еще один способ вычисления индекса	57
§ 8.	Векторные поля с главной полилинейной частью	60
8.1.	Полилинейное поле	60
8.2.	Общая теорема	61
8.3.	Частный класс полилинейных полей	62
8.4.	Общий случай полилинейных полей	65
8.5.	Билинейные поля	67
8.6.	Основная формула для вычисления индекса	70
8.7.	Асимптотически полилинейные поля	73
§ 9.	Особые точки аналитических функций	74
9.1.	Функция $w = z^n$	74
9.2.	Индекс нуля аналитической функции	75
9.3.	Индекс полюса	75
Глава 3.	Приложения	77
§ 10.	Разрешимость уравнений	77
10.1.	Теорема Боля - Брауэра	77
10.2.	Основная теорема алгебры	79
10.3.	О нулях и полюсах аналитических функций	81
10.4.	Системы двух и трех уравнений	82
10.5.	Системы с полилинейной главной частью	84
10.6.	Существование неявной функции	86
10.7.	О расположении корней многочлена	88
10.8.	Четность степени эллиптических многочленов	91
§ 11.	Векторные поля градиентов функции	92
11.1.	Потенциальные системы уравнений	92
11.2.	Индекс критической точки	93
11.3.	Относительное вращение поля	95
11.4.	Точки локального экстремума на границе области	98
11.5.	Входящие и выходящие точки локального экстремума	99
11.6.	Устойчивость критических значений	101
§ 12.	Критические точки гармонических и псевдогармонических функций	102
12.1.	Структура линий уровня гармонической функции	102
12.2.	Индексы особых точек гармонических функций	104
12.3.	Вращение поля градиентов гармонической функции	106
12.4.	Псевдогармонические функции	106
§ 13.	Особые точки дифференциальных уравнений	111
13.1.	Определения	111

13.2.	Признаки существования особых точек	114
13.3.	Индекс особой точки	118
13.4.	Признак неустойчивости состояния равновесия	121
13.5.	Уравнение второго порядка	124
§ 14.	Линейные краевые задачи	125
14.1.	Угловая функция решения	125
14.2.	Дифференциальные и интегральные неравенства	128
14.3.	Теорема Штурма	130
14.4.	Об уравнениях второго порядка	134
14.5.	Классы G_k	135
14.6.	Задача о собственных значениях	140
14.7.	Задача Штурма-Лиувилля	142
14.8.	Об устойчивости собственных значений краевой задачи	134
§ 15.	Нелинейные краевые задачи	147
15.1.	Вспомогательные предложения	147
15.2.	Теоремы сравнения	151
15.3.	Классы H_k	155
15.4.	Условия разрешимости краевой задачи	156
15.5.	Оценка числа решений краевой задачи	163
15.6.	Задача о собственных значениях	167
§ 16.	Метод направляющей функции в задаче о периодических решениях	172
16.1.	Оператор Пуанкаре-Андрона	172
16.2.	Лемма	174
16.3.	Направляющая функция	175
16.4.	Знакопостоянная направляющая функция	177
16.5.	Основная теорема	178
16.6.	Существование ограниченных решений	183
Дополнение		185
§ 17.	Вычисление индекса нулевой особой точки в общем случае	185
17.1.	Предварительные замечания	185
17.2.	Основная теорема	187
17.3.	Лучи вырождения	190
17.4.	Вспомогательные леммы	191
17.5.	Исследование основного случая	194
17.6.	Исследование случаев вырождения	195
17.7.	Пример	198
Литература		202
Предметный указатель		204

ГЛАВА 1

ВРАЩЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

§ 1. Угловая функция

1.1. Векторное поле. Пусть в каждой точке M некоторого плоского множества Ω задан вектор $\Phi(M)$, лежащий в той же плоскости. В этом случае будем говорить, что на Ω задано *векторное поле* Φ . Если на плоскости определена некоторая прямоугольная система координат, то задание векторного поля $\Phi(M)$ эквивалентно заданию двух вещественных функций $\phi(M)$ и $\psi(M)$ точки $M \in \Omega$ — компонент векторов $\Phi(M)$.

Векторное поле будем называть *непрерывным*, если функции $\phi(M)$, $\psi(M)$ непрерывны.

Векторные поля встречаются и их приходится изучать при решении разнообразных математических задач.

В частности, во многих случаях векторы $\Phi(M)$ определяются как сдвиги точек, определяемые некоторым преобразованием A , заданным на Ω :

$$\Phi(M) = A(M) - M.$$

В качестве второго примера рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (1.1)$$

Если решение этой системы рассматривать как закон движения точки в плоскости с прямоугольными координатами (x, y) , то векторное поле

$$\Phi(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) \quad (1.2)$$

— это поле скоростей движущихся по упомянутым законам точек. Выписать решения системы (1.1) в явном виде обычно невозможно, а общее представление о поле скоростей (1.2) в ряде случаев можно получить без труда. Априори ясно, что общие характеристики поля скоростей должны нести существенную информацию о решениях системы (1.1).

Рассмотрим, наконец, функцию $f(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$. Изучение функции

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (1.3)$$

равносильно изучению векторного поля

$$\Phi(x, y) = (u(x, y), v(x, y)). \quad (1.4)$$

1.2. Угловая функция. Пусть непрерывное векторное поле $\Phi(M)$ задано на некоторой жордановой кривой Γ без самопересечений. Если Γ — гладкая кривая, то примерами могут быть поля единичных касательных или нормальных векторов, направленных в определенную сторону (рис. 1.1).

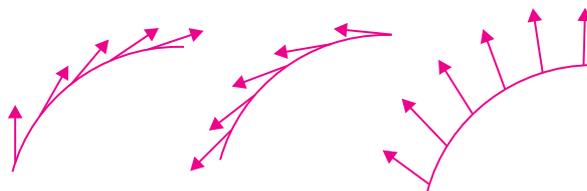


Рис. 1.1

Допустим, что кривая Γ задана в параметрической форме:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b). \quad (1.5)$$

Тогда задание векторного поля

$$\Phi(x, y) = (\phi(x, y), \psi(x, y)) \quad (1.6)$$

на кривой Γ равносильно заданию вектор-функции

$$\Phi(t) = (\phi(x(t), y(t)), \psi(x(t), y(t))) \quad (1.7)$$

на отрезке $[a, b]$.

Пусть вектор-функция $\Phi(t)$ непрерывна и все векторы $\Phi(t)$ не равны нулю. Определим для каждого $t \in [a, b]$ угол (в радианах) между векторами $\Phi(t)$ и $\Phi(a)$, отсчитанный от $\Phi(a)$ в положительном направлении (против хода часовой стрелки). Этот угол является многозначной функцией t . Через $\theta(t)$ обозначим непрерывную ветвь этой функции, обращающуюся в нуль при $t = a$ (см. рис. 1.2), и назовем ее *угловой функцией* поля Φ на кривой Γ .

В качестве примера рассмотрим векторное поле

$$\Phi(x, y) = (x, y) \quad (1.8)$$

на кривой (половине единичной окружности)

$$x = \cos \pi t, \quad y = \sin \pi t \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (1.9)$$

Очевидно (рассмотрите чертеж), $\theta(t) = \pi t$.

Упражнение 1.1. Найти и построить графики угловых функций векторных полей, заданных на кривой (1.9) равенством:

- 1) $\Phi(x, y) = (y, -x)$,
- 2) $\Phi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$,
- 3) $\Phi(x, y) = (x^2, y^2)$,
- 4) $\Phi(x, y) = \left(1, \frac{1}{2}(x + |x|)\right)$.

Из определения угловой функции вытекает, что она не меняется, если все векторы поля поворачивать на один и тот же угол. Угловая функция не изменится при замене каждого вектора $\Phi(x, y)$ единичным вектором того же направления, то есть при переходе к “нормированному” полю

$$\Phi_1(x, y) = \frac{\Phi(x, y)}{\|\Phi(x, y)\|} \quad (1.10)$$

(через $\|\Phi\|$ здесь и ниже обозначается длина вектора Φ). Формула (1.10) имеет смысл, так как угловая функция определена лишь для полей, не имеющих нулевых векторов.

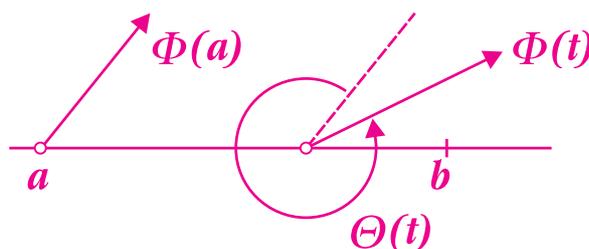


Рис. 1.2

В заключение пункта подчеркнем, что угловая функция зависит от того, каким способом на кривой Γ введен параметр.

Упражнение 1.2. Как изменится угловая функция, если от параметра t , меняющегося на $[0, 1]$, перейти к новому параметру τ , связанному с t равенством:

- 1) $t = \tau^2$,
- 2) $t = 1 - \tau$,
- 3) $t = t(\tau)$?

1.3. Вращение поля. Приращение угловой функции $\theta(t)$ на всем отрезке $[a, b]$, выраженное в единицах полного оборота, то есть величину

$$\gamma(\Phi, \Gamma) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)) = \frac{1}{2\pi}\theta(b), \quad (1.11)$$

назовем *вращением поля Φ на кривой Γ* .

Введение на кривой Γ параметра t превращает Γ в ориентированную кривую (перемещение точки при возрастании t задает эту ориентацию — см. рис. 1.3).

Приведенное выше определение вращения векторного поля зависит от способа введения параметра. Нетрудно видеть, что вращение поля Φ на кривой Γ при двух способах введения параметра одинаково, если эти параметры определяют на Γ одинаковую ориентацию. Если же две параметризации определяют разные ориентации, то вращения будут отличаться лишь знаком.

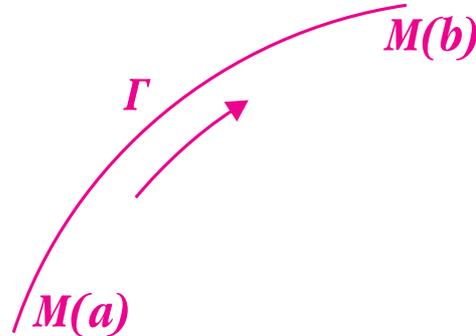


Рис. 1.3

Таким образом, *вращение поля определяется лишь ориентацией кривой. При переходе к противоположной ориентации абсолютная величина вращения сохраняется, а знак вращения меняется.*

Из проведенных в предыдущем пункте рассуждений вытекает, что вращение не меняется при повороте всех векторов поля на один и тот же угол и при нормировании поля.

Если ориентированная кривая Γ является объединением нескольких ориентированных кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ (см. рис. 1.4), то вращение поля Φ на Γ равно сумме вращений на $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ (докажите).

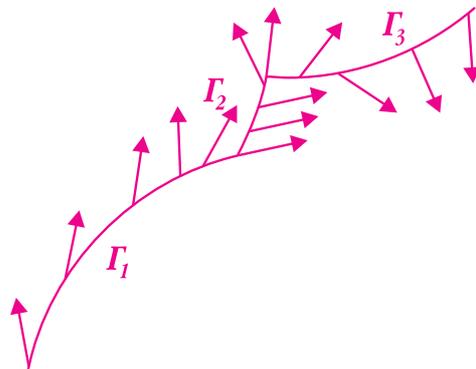


Рис. 1.4

Вращение может быть любым вещественным числом. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что $\theta(t)$ является угловой функцией поля

$$\Phi(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)), \quad (1.12)$$

рассматриваемого на отрезке

$$x = t, \quad y = 0 \quad (0 \leq t \leq 1); \quad (1.13)$$

вращение γ этого поля равно $\frac{1}{2\pi}\theta(1)$ и может быть любым, так как непрерывная функция $\theta(t)$ может выбираться произвольным способом.

Если на двух концах кривой Γ векторы поля Φ направлены одинаково, то изменение угловой функции кратно 2π и, следовательно, вращение является *целым* числом. Аналогично, если на концах кривой Γ векторы поля Φ направлены противоположно, то $\gamma(\Phi, \Gamma) = n + \frac{1}{2}$, где n — некоторое целое число.

Вращение векторного поля параллельных векторов равно нулю, так как в этом случае $\theta(t) \equiv 0$. Однако вращение может быть равно нулю и в других случаях.

Упражнение 1.3. Вычислить вращение на полуокружности $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$ (при различной ориентации) следующих векторных полей:

- 1) $\Phi(x, y) = (x, y)$,
- 2) $\Phi(x, y) = (y, -x)$,
- 3) $\Phi(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$,
- 4) $\Phi(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$.

1.4. Формула Пуанкаре. Предположим дополнительно, что кривая Γ ($x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$) кусочно гладкая, а векторное поле

$$\Phi(x, y) = (\phi(x, y), \psi(x, y))$$

непрерывно дифференцируемо в том смысле, что функции $\phi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ непрерывно дифференцируемы.

Пусть вектор

$$\Phi(t) = (\phi(x(t), y(t)), \psi(x(t), y(t)))$$

образует с осью абсцисс угол $\alpha(t)$. Очевидно,

$$\theta(t) = \alpha(t) - \alpha(a)$$

и

$$d\theta = d\alpha = d \operatorname{arctg} \frac{\psi}{\phi} = \frac{\phi d\psi - \psi d\phi}{\phi^2 + \psi^2}. \quad (1.14)$$

Отсюда вытекает, что

$$\gamma(\Phi, \Gamma) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d\theta(t),$$

то есть

$$\gamma(\Phi, \Gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\phi(x, y) d\psi(x, y) - \psi(x, y) d\phi(x, y)}{\phi^2(x, y) + \psi^2(x, y)}. \quad (1.15)$$

Эта формула имеет смысл, так как знаменатель в подынтегральном выражении в нуль не обращается — вращение (как и угловая функция) определено лишь для непрерывных полей без нулевых векторов.

Если положить

$$\phi(x(t), y(t)) = \phi(t), \quad \psi(x(t), y(t)) = \psi(t),$$

то формулу Пуанкаре (1.15) можно записать при помощи обыкновенного интеграла

$$\gamma(\Phi, \Gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\phi(t)\psi'(t) - \psi(t)\phi'(t)}{\phi^2(t) + \psi^2(t)} dt. \quad (1.16)$$

Для фактического вычисления вращения формула Пуанкаре малоудобна¹.

1.5. Вычисление вращения. После введения параметра вычисление вращения поля на произвольной кривой сводится к вычислению вращения поля

$$\Phi(t) = (P(t), Q(t)) \quad (1.17)$$

на некотором отрезке $x = t$, $y = 0$ ($a \leq t \leq b$). При вычислении вращения удобно отрезок $[a, b]$ разбить на части так, чтобы вращение на каждой части вычислялось просто, а затем воспользоваться тем фактом, что вращение на всем отрезке равно сумме вращений на его частях.

При вычислении вращения полезно иметь в виду, что вращение равно выраженному в единицах полного оборота наименьшему углу между векторами на концах кривой M_1M_2 , если ни один вектор поля $\Phi(M)$ не направлен противоположно вектору $\Phi(M_1)$ в точке M_1 (если ни один вектор поля не направлен противоположно вектору $\Phi(M_2)$ в точке M_2). Для доказательства достаточно заметить, что в общем случае вращение отличается от угла между векторами $\Phi(M_1)$ и $\Phi(M_2)$ на целое число и что угловая функция поля, вращение которого по абсолютной величине больше $\frac{1}{2}$, принимает либо значение π , либо значение $-\pi$ (в соответствующей точке вектор поля направлен противоположно $\Phi(M_1)$).

Допустим, что уравнение

$$P(t) = 0 \quad (1.18)$$

имеет на $[a, b]$ конечное число решений

$$t_0 < t_1 < \dots < t_k.$$

Вращение γ поля (1.17) на всем отрезке $[a, b]$ представим как сумму

$$\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \dots + \gamma_k, \quad (1.19)$$

где α_1 и α_2 — вращения соответственно на отрезках $[a, t_0]$ и $[t_k, b]$, а γ_k — вращение на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ ($i = 1, \dots, k$).

На каждом отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ колебание угловой функции $\theta(t)$ поля (1.17) не превышает π , так как в противном случае функция $P(t)$ принимала бы нулевое значение в некоторой точке интервала (t_{i-1}, t_i) . Поэтому каждое γ_i принимает одно из трех значений: $\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}$.

¹Впрочем, ряд устанавливаемых ниже теорем может быть доказан и при помощи формулы Пуанкаре. Ряд соотношений, связанных по существу с вращением, выведен в *Курсе математического анализа Э. Гурса* (см., например, т. 1, ОНТИ, 1936, § 76): многие из этих соотношений устанавливаются ниже.

Если

$$\text{sign } Q(t_{i-1}) = \text{sign } Q(t_i),$$

то векторы поля на концах отрезка $[t_{i-1}, t_i]$ направлены одинаково и поэтому $\gamma_i = 0$.

Пусть

$$\text{sign } Q(t_{i-1}) = 1, \quad \text{sign } Q(t_i) = -1.$$

Тогда (см. рис. 1.5) $\gamma_i = -\frac{1}{2}$ при $P\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) > 0$ и $\gamma_i = \frac{1}{2}$ при $P\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) < 0$.

Аналогично при

$$\text{sign } Q(t_{i-1}) = -1, \quad \text{sign } Q(t_i) = 1$$

вращение γ_i вычисляется по правилу $\gamma_i = -\frac{1}{2}$ при $P\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) < 0$ и $\gamma_i = \frac{1}{2}$ при $P\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) > 0$.

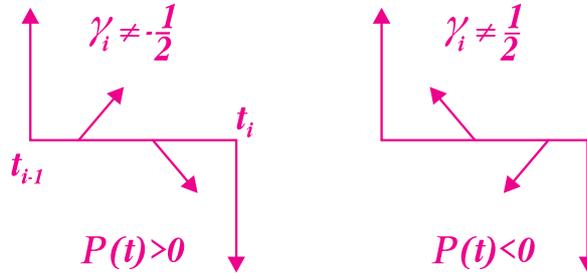


Рис. 1.5

Все перечисленные случаи можно охватить общей формулой

$$\gamma_i = \frac{1}{4} \text{sign } P\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) (\text{sign } Q(t_i) - \text{sign } Q(t_{i-1})), \quad (1.20)$$

проверку которой предоставляем читателю. Формула (1.19) перепишется тогда в виде

$$\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1}{4} \text{sign } P\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) (\text{sign } Q(t_i) - \text{sign } Q(t_{i-1})). \quad (1.21)$$

При применении этой формулы полезно помнить, что $P(t)$ на интервале (t_{i-1}, t_i) принимает значения одного знака.

В качестве примера рассмотрим поле

$$\Phi(x, y) = (x^2 - y^2, 10xy)$$

на той половине единичной окружности, которая выделена неравенством $y \geq 0$, с параметром $t = x$. Функции $P(t)$ и $Q(t)$ определяются равенствами

$$P(t) = 2t^2 - 1, \quad Q(t) = 10t\sqrt{t^2 - 1} \quad (-1 \leq t \leq 1).$$

Уравнение $P(t) = 0$ имеет два корня: $t_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Направление векторов $\Phi(-1)$ и $\Phi(1)$ совпадает с положительным направлением оси абсцисс. Векторы $\Phi(t_0)$ и $\Phi(t_1)$ направлены соответственно по отрицательному и положительному направлению оси ординат. Поэтому $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{1}{4}$. Из формулы (1.21) вытекает, что вращение рассматриваемого поля равно -1 .

Нетрудно видеть, что формула (1.21) сохраняет силу, если сумму в ней брать только по таким парам соседних нулей функции $P(t)$, между которыми есть нули функции $Q(t)$. В этой последней форме формула (1.21) верна и в том случае, когда уравнение $P(t) = 0$ имеет бесконечное множество нулей.

Упражнение 1.4.

1) Вычислить вращение поля

$$\left(t \left(t - \frac{1}{4} \right) \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 \left(t - \frac{3}{4} \right), \left(t - \frac{1}{3} \right)^3 \left(t - \frac{2}{3} \right)^2 \left(t - \frac{8}{9} \right) (t - 1) \right) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

2) Вычислить описанным в этом пункте методом вращение полей, указанных в упражнении 1.3.

§ 2. Векторные поля на замкнутых кривых

2.1. Замкнутые кривые. В дальнейшем мы будем рассматривать непрерывные векторные поля на замкнутых жордановых кривых Γ . Всякая такая кривая разбивает плоскость на две области, одна из которых ограничена и гомеоморфна кругу; об этой области говорят, что она лежит внутри Γ ; обозначим ее через Ω .

Положительным направлением обхода замкнутой кривой Γ называется такое направление, при котором область Ω остается слева (см. рис. 2.1). Противоположное направление называется *отрицательным*. О положительном направлении часто говорят, что это обход “против часовой стрелки”, а об отрицательном — “по ходу часовой стрелки”.

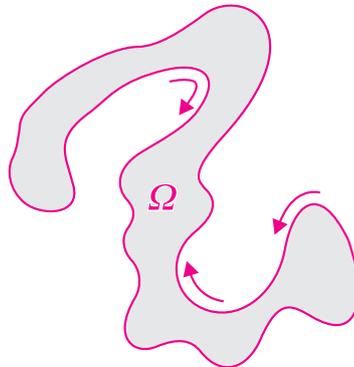


Рис. 2.1

Всюду в дальнейшем предполагается, если нет специальных оговорок, что на Γ рассматривается ориентация, определяющая положительное направление обхода. В соответствии с этим мы будем, как правило, рассматривать такие параметрические задания

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b) \quad (2.1)$$

замкнутой жордановой кривой Γ , при которых возрастанию параметра t соответствует положительное направление обхода (при этом Γ обходится ровно один раз, когда t меняется от a до b).

2.2. Вращение и угловая функция. Пусть на замкнутой кривой Γ задано непрерывное векторное поле Φ без нулевых векторов.

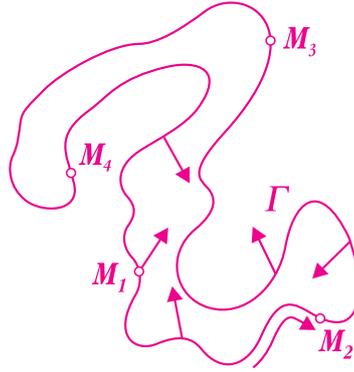


Рис. 2.2

Разобьем кривую Γ точками M_1 и M_3 на две части $M_1M_2M_3$ и $M_3M_4M_1$ (см. рис. 2.2) и каждую из этих частей будем считать ориентированной в соответствии с положительным направлением обхода замкнутой кривой Γ .

Вращением поля Φ на Γ назовем сумму вращений поля Φ на кривых $M_1M_2M_3$ и $M_3M_4M_1$.

Нетрудно видеть, что вращение $\gamma(\Phi, \Gamma)$ поля Φ на Γ не зависит от того, на какие две части разбита дуга Γ .

Вращение можно ввести и при помощи угловой функции. Для этого по полю

$$\Phi(x, y) = (\phi(x, y), \psi(x, y)), \quad (2.2)$$

заданному на Γ , нужно определить вектор-функцию

$$\Phi(t) = (\phi(x(t), y(t)), \psi(x(t), y(t))) \quad (a \leq t \leq b), \quad (2.3)$$

используя некоторое параметрическое задание (2.1) кривой Γ . Затем нужно рассмотреть непрерывную ветвь $\theta(t)$ функции, равной углу между векторами $\Phi(t)$ и $\Phi(a)$ (отсчитываемому против хода часовой стрелки — см. п. 1.2) и удовлетворяющей условию $\theta(a) = 0$. Вращение $\gamma(\Phi, \Gamma)$ поля Φ на Γ равно приращению $\theta(b) - \theta(a)$ угловой функции $\theta(t)$, выраженному в единицах полного оборота:

$$\gamma(\Phi, \Gamma) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)) = \frac{1}{2\pi}\theta(b). \quad (2.4)$$

Эквивалентность двух приведенных определений очевидна.

Условие замкнутости кривой (2.1) выражается равенствами

$$x(b) = x(a), \quad y(b) = y(a). \quad (2.5)$$

Поэтому векторы $\Phi(b)$ и $\Phi(a)$ совпадают. Отсюда непосредственно вытекает, что *вращение — целое число*.

Первое определение удобно с той точки зрения, что оно не зависит от способа задания кривой. Вторым определением удобно пользоваться при вычислении вращения.

Рассмотрим для примера поле $\Phi(x, y) = (x, y)$ на единичной окружности (см. рис. 2.3). Если в качестве параметра t выбрать полярный угол, то угловая функция определится равенством

$$\theta(t) = t.$$

Поэтому вращение поля равно 1.

В качестве второго примера рассмотрим поле $\Phi(x, y) = (-x, y)$ на той же окружности. При том же параметре t угловая функция имеет вид

$$\theta(t) = -t.$$

Поэтому вращение поля равно -1 .

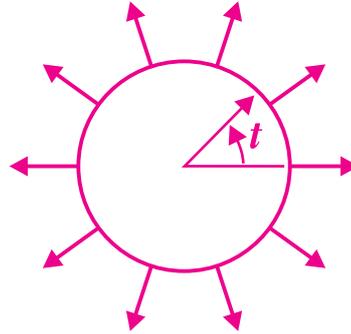


Рис. 2.3

Формула (1.21) при вычислении вращения γ на замкнутой кривой Γ упрощается. Это объясняется тем, что поле (1.17) (мы сохраняем обозначения п. 1.5) обладает дополнительным свойством

$$\Phi(b) = \Phi(a). \quad (2.6)$$

Мы напишем эквивалент формулы (1.21) в несколько другой форме.

При изучении векторного поля (1.17) на замкнутой кривой удобно считать функции $P(t)$ и $Q(t)$ продолженными периодически на всю числовую ось (с периодом $\omega = b - a$). Допустим снова, что функция $P(t)$ имеет на полуинтервале $[a, b)$ ($a \leq t < b$) конечное число нулей. Выберем лишь те нули t_1^*, \dots, t_s^* , в которых

функция $Q(t)$ принимает положительное значение (эти нули соответствуют точкам кривой, в которых направление векторов поля совпадает с положительным направлением оси ординат). Через p обозначим количество точек t_i^* , при переходе через которые функция $P(t)$ возрастает (при близких t_i^* и меньших, чем t_i^* , значениях t функция отрицательна, а при больших — положительна), а через q — количество точек t_i^* , при переходе через которые функция $P(t)$ убывает. Имеет место равенство

$$\gamma(\Phi, \Gamma) = q - p. \quad (2.7)$$

Доказательство этой формулы проведем вначале для случая, когда $t_1^* = a$. Тогда точки t_i^* будут абсциссами точек пересечения графика угловой функции $\theta(t)$ с прямыми $y = 0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \dots$ (см. рис. 2.4). Возрастание $P(t)$ при переходе t через t_i^* соответствует убыванию $\theta(t)$ в точке t_i^* . Наоборот, убывание $P(t)$ соответствует возрастанию $\theta(t)$. Отсюда и следует равенство (2.7).

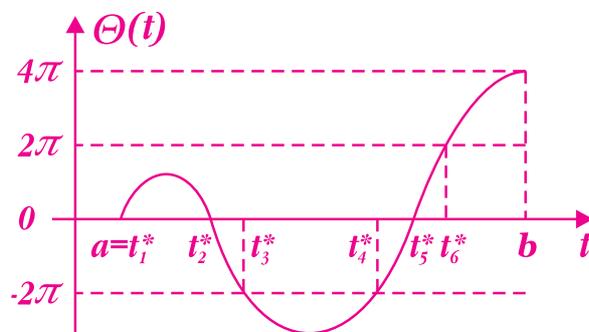


Рис. 2.4

Доказательство формулы (2.7) в общем случае сводится к рассмотренному случаю, если функции $x(t)$ и $y(t)$ из (2.1) продолжить периодически и рассматривать параметр t на промежутке $[t_1^*, t_1^* + b - a]$. Числа p и q от перехода к новому параметру не изменяются.

В простых случаях формула (2.7) очень удобна. В более сложных случаях для вычисления вращения приходится применять специальные приемы, которые излагаются ниже.

Упражнение 2.1. Обозначим через p_i количество нулей $P(t)$ в которых $Q(t)$ отрицательна и при переходе через которые функция $P(t)$ убывает; через q_i обозначим количество нулей функции $P(t)$, в которых $Q(t)$ отрицательна и при переходе через которые функция $P(t)$ возрастает. Доказать, что $\gamma(\Phi, \Gamma) = q_i - p_i$.

Упражнение 2.2. Вычислить вращение на единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$ следующих векторных полей:

- 1) $\Phi(x, y) = (-x, -y)$,
- 2) $\Phi(x, y) = (y, -x)$,
- 3) $\Phi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$,
- 4) $\Phi(x, y) = (x^2 + y^4, 2xy^4)$.

2.3. Формула Пуанкаре. Интегральная формула (1.15) в случае замкнутых кривых принимает вид

$$\gamma(\Phi, \Gamma) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{\phi d\psi - \psi d\phi}{\phi^2 + \psi^2}. \quad (2.8)$$

В качестве примера вычислим вращение γ поля $\Phi(x, y) = (x, y)$ радиус-векторов точки на замкнутой кривой Γ , ограничивающей область Ω . Из (2.8) следует, что

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{\phi d\psi - \psi d\phi}{\phi^2 + \psi^2}. \quad (2.9)$$

Допустим вначале, что область Ω не содержит нулевую точку $(0, 0)$. Тогда подынтегральное выражение является в этой области полным дифференциалом (проверьте) и поэтому интеграл равен нулю. Следовательно, и вращение равно нулю.

Пусть Ω содержит нулевую точку $(0, 0)$. Из теорем о независимости интеграла от пути вытекает, что интеграл в формуле (2.9) можно вычислять по единичной окружности L :

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \oint_L \frac{\phi d\psi - \psi d\phi}{\phi^2 + \psi^2} = \frac{1}{2\pi} \oint_L x dy - y dx = 1.$$

Упражнение 2.3. Допустим, что функции $\phi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируемы на области Ω вместе с границей Γ и не обращаются одновременно в нуль. Покажите, пользуясь формулой (2.8), что вращение поля (2.2) на Γ равно нулю.

Для вычисления вращения по формуле (2.8) с успехом могут быть применены формулы механических квадратур. Априори известно, что вращение на замкнутой кривой есть целое число. Поэтому точное значение вращения будет известно, если правая часть в формуле (2.8) будет вычислена с погрешностью, меньшей чем 0,5.

2.4. Об одном признаке отличия вращения от нуля. Во многих случаях, как будет выяснено ниже, точное значение вращения не играет роли; важно лишь знать, что вращение отлично от нуля.

Пусть A — непрерывное преобразование замкнутой кривой Γ в себя без неподвижной точки. Примерами такого преобразования, например, окружности в себя может служить переход к диаметрально противоположной точке или поворот окружности на некоторый угол вокруг центра.

Теорема 2.1. Пусть для всех точек M кривой Γ векторы $\Phi(M)$ и $\Phi(A(M))$ отличны от нуля и направлены неодинаково, то есть,

$$\frac{\Phi(A(M))}{\|\Phi(A(M))\|} \neq \frac{\Phi(M)}{\|\Phi(M)\|}. \quad (2.10)$$

Тогда вращение непрерывного векторного поля Φ на Γ отлично от нуля.

Доказательство. Пусть кривая Γ задана уравнениями (2.1), и пусть точке $A(M)$ соответствует значение параметра $\varkappa(t)$, если точке M соответствует значение t . Если функции $x(t)$ и $y(t)$ считать продолженными периодически на всю числовую ось, то и функцию $\varkappa(t)$ можно считать непрерывной и периодической с тем же периодом $b - a$.

Допустим, что вращение поля Φ на Γ равно нулю. Тогда угловая функция $\theta(t)$ принимает в точках a и b одинаковые значения и ее также можно считать продолженной периодически на всю числовую ось.

Рассмотрим функцию

$$\alpha(t) = \theta(t) - \theta(\varkappa(t)).$$

Из условия (2.10) вытекает, что эта функция не принимает нулевых значений. С другой стороны, в точке t_1 абсолютного максимума функции $\theta(t)$ выполнено очевидное неравенство

$$\alpha(t_1) > 0.$$

В точке t_2 абсолютного максимума функции $\theta(t)$ выполнено неравенство

$$\alpha(t_2) < 0.$$

Поэтому $\alpha(t)$ принимает нулевые значения, и мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Упражнение 2.4.

1) Показать, что в условиях теоремы 2.1 поле Φ может иметь любое отличное от нуля вращение.

2) Построить пример поля Φ с ненулевым вращением, которое ни при одном преобразовании A не удовлетворяет условию (2.10).

3) Найти необходимые и достаточные условия, при которых для данного поля Φ можно указать такое преобразование A , чтобы было выполнено условие (2.10).

4) Для любого преобразования A без неподвижной точки построить поле Φ , удовлетворяющее условию (2.10).

2.5. Нечетные поля. Поле Φ на окружности Γ называется *нечетным*, если в диаметрально противоположных точках векторы поля направлены противоположно (см. рис. 2.5). Из теоремы 2.1 вытекает, что вращение нечетного поля отлично от нуля (К. Борсук). Докажем более точное утверждение.

Теорема 2.2 (Борсук, Хопф). Вращение нечетного поля нечетно.

Доказательство. Вращение γ поля Φ на окружности

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

равно сумме вращений γ_1 и γ_2 на верхней и нижней полуокружностях, соответствующих изменению t в промежутках $[0, \pi]$ и $[\pi, 2\pi]$. Угловые функции поля Φ

на этих полуокружностях совпадают в силу нечетности поля, и, следовательно, $\gamma_1 = \gamma_2$.

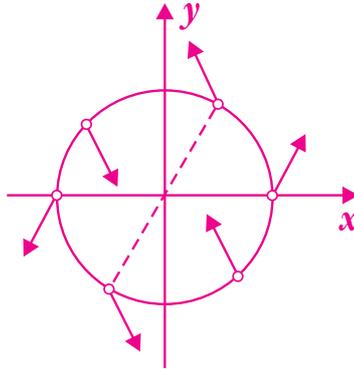


Рис. 2.5

На концах полуокружности векторы поля направлены противоположно. Поэтому $\gamma_1 = n_0 + \frac{1}{2}$, где n_0 — некоторое целое число. Значит,

$$\gamma(\Phi, \Gamma) = \gamma_1 + \gamma_2 = 2n_0 + 1.$$

Теорема доказана.

Упражнение 2.5. Поле Φ на окружности называется *четным*, если в диаметрально противоположных точках векторы направлены одинаково. Показать, что вращение четного поля четно.

Упражнение 2.6. Пусть в диаметрально противоположных точках векторы поля Φ симметричны относительно некоторой прямой. Показать, что вращение поля равно нулю.

Упражнение 2.7. Преобразование A замкнутой кривой Γ в себя называется *инволюцией*, если

$$A^2(M) = A(A(M)) = M \quad (M \in \Gamma).$$

Показать, что вращение непрерывного векторного поля Φ на Γ нечетно, если векторы поля в точках M и $A(M)$ при всех $M \in \Gamma$ направлены противоположно, где A — некоторая непрерывная инволюция.

2.6. Поле касательных. Рассмотрим на окружности $x^2 + y^2 = R^2$ (рис. 2.6) поле касательных. Это поле можно получить из поля $\Psi(x, y)$ внешних нормалей поворотом на постоянный угол $\frac{\pi}{2}$. Поэтому вращение поля касательных равно вращению поля нормалей и, следовательно, равно 1. Этот факт справедлив в более общем случае.

Пусть Γ — замкнутая гладкая кривая. Гладкость кривой означает, что на ней можно построить непрерывное поле Φ касательных (см. рис. 2.7), направление на которых совпадает с положительным направлением обхода Γ .

Теорема 2.3. Вращение поля Φ касательных равно 1.

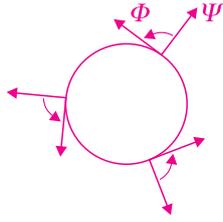


Рис. 2.6

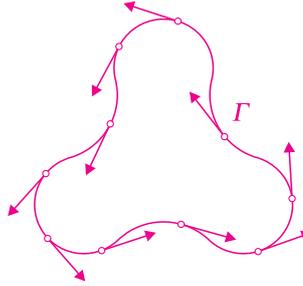


Рис. 2.7

Перед тем, как перейти к доказательству этой теоремы, рассмотрим произвольный замкнутый многоугольник без кратных точек (без самопересечений), стороны которого в порядке положительного обхода обозначим через a_1, a_2, \dots, a_n (см. рис. 2.8).

Пусть α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — угол, отсчитанный от положительного направления a_i к положительному направлению a_{i+1} и взятый в промежутке $(-\pi, \pi)$. Для многоугольника, изображенного на рис. 2.8, угол α_3 отрицателен, а остальные α_i положительны. Легко видеть, что

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 2\pi.$$

Перейдем к доказательству теоремы 2.3.

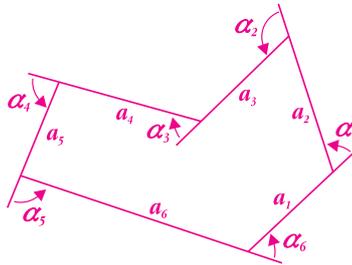


Рис. 2.8

Гладкость кривой Γ и равномерная непрерывность угловой функции $\theta(t)$ ($a \leq t \leq b$) поля касательных позволяет произвести такое разбиение кривой Γ точками

$$M(t_1), M(t_2), \dots, M(t_n) \quad (a = t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = b),$$

что:

а) приращение $\Delta\theta_i$ угловой функции на каждом отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ будет равно углу между векторами поля в точках t_i и t_{i+1} (см. п. 1.6) и не будет превышать по абсолютной величине π ;

б) касательные к Γ в точках $M(t_i)$ при продолжении до пересечения с касательными в точках $M(t_{i-1})$ и $M(t_{i+1})$ образуют замкнутый многоугольник без кратных точек (см. рис. 2.9).

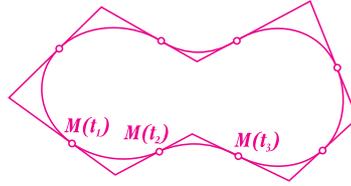


Рис. 2.9

Для этого многоугольника определенные выше углы α_i совпадают с $\Delta\theta_i$. Поэтому

$$\gamma(\Phi, \Gamma) = \frac{1}{2\pi}\theta(b) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

Теорема доказана.

Если все касательные повернуть на угол $\frac{\pi}{2}$ (или $-\frac{\pi}{2}$), то мы получим поле внутренних (или внешних) нормалей. Вращение поля при таком повороте не меняется. Итак, справедлива

Теорема 2.4. *Вращение поля внутренних (или внешних) нормалей к гладкой замкнутой кривой равно 1.*

Упражнение 2.8. *Вычислить вращение поля касательных, направление которых противоположно положительному направлению обхода Γ .*

§ 3. Особые точки векторного поля

3.1. Вращение на границе многосвязной области. Пусть в области Ω_0 , ограниченной кривой Γ_0 , лежат не имеющие общих точек замкнутые кривые $\Gamma_1, \dots, \Gamma_\nu$, ограничивающие соответственно области $\Omega_1, \dots, \Omega_\nu$. Будем предполагать, что области $\Omega_1, \dots, \Omega_\nu$ не имеют общих точек (см. рис. 3.1).

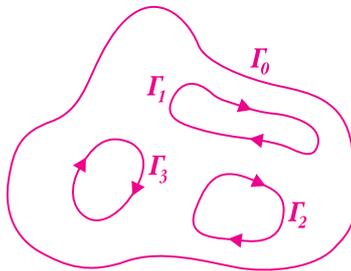


Рис. 3.1

Область Ω , состоящая из точек, внутренних относительно Γ_0 и внешних относительно всех кривых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_\nu$, называется $(\nu + 1)$ -связной областью. Границей области Ω является совокупность кривых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_\nu$. Каждой из этих кривых припишем такое направление обхода, при котором область Ω остается слева (см. рис.

3.1). Это направление на Γ_0 совпадает с направлением против хода часовой стрелки, а на остальных кривых — по ходу часовой стрелки.

Через Γ будем обозначать всю границу области Ω , то есть объединение кривых $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_\nu$.

Пусть на Γ задано непрерывное векторное поле Φ без нулевых векторов. Вращение этого поля на каждой кривой $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_\nu$ обозначим соответственно через $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_\nu$ (вращение определяется, как указано в § 2, для кривых с направлением обхода против хода часовой стрелки).

Вращение $\gamma(\Phi; \Gamma)$ поля Φ на границе Γ области Ω определим равенством

$$\gamma(\Phi, \Gamma) = \gamma(\Phi, \Gamma_0) - \sum_{i=1}^{\nu} \gamma(\Phi, \Gamma_i). \quad (3.1)$$

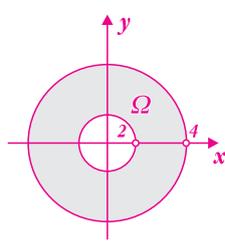


Рис. 3.2

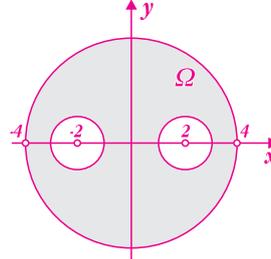


Рис. 3.3

В некоторых случаях формулу (3.1) удобно записывать в другой форме. Договоримся в дальнейшем каждую замкнутую кривую Γ^* рассматривать вместе с положительным направлением обхода (против часовой стрелки). Символом $-\Gamma^*$ будем обозначать ту же кривую с противоположным направлением обхода. Переход к противоположному направлению обхода меняет знак вращения:

$$\gamma(\Phi, -\Gamma^*) = -\gamma(\Phi, \Gamma^*). \quad (3.2)$$

Поэтому формулу (3.1) можно записать в виде

$$\gamma(\Phi, \Gamma) = \gamma(\Phi, \Gamma_0) + \gamma(\Phi, -\Gamma_1) + \dots + \gamma(\Phi, -\Gamma_\nu). \quad (3.3)$$

Иначе говоря, вращение на Γ равно сумме вращений на всех замкнутых кривых, из которых состоит Γ , причем эти кривые берутся с соответствующей ориентацией.

Упражнение 3.1. Вычислить вращение поля $\Phi(x, y) = (x, y)$ на границах областей, указанных на рис. 3.2 и 3.3.

3.2. Вращение поля без нулевых векторов. До сих пор рассматривались векторные поля, заданные на кривых. Начиная с этого пункта, как правило, рассматриваются поля, заданные на некоторых замкнутых областях $\bar{\Omega}$ (областях вместе с их границей). В этом пункте мы будем предполагать, что область Ω $(\nu + 1)$ -связна и что ее граница состоит из $\nu + 1$ жордановой замкнутой кривой (см. предыдущий пункт).

Теорема 3.1. Пусть непрерывное векторное поле Φ в замкнутой области $\bar{\Omega}$ не имеет нулевых векторов.

Тогда вращение $\gamma(\Phi, \Gamma)$ поля Φ на границе Γ области Ω равно нулю.

Доказательство. Из непрерывности поля Φ вытекает существование такого $\delta > 0$, что для любых двух точек M_1 и M_2 , расстояние между которыми меньше δ , угол между векторами $\Phi(M_1)$ и $\Phi(M_2)$ не превышает $\frac{\pi}{2}$.

Область Ω можно разбить на конечное число областей $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_n$, диаметр которых меньше δ , при помощи конечного числа жордановых дуг² (см. рис. 3.4).

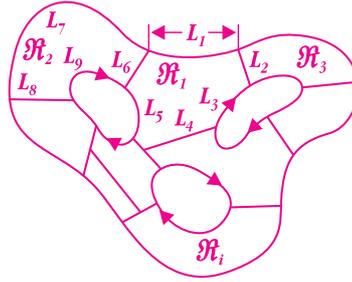


Рис. 3.4

Обозначим через L_1, L_2, \dots, L_m (см. рис. 3.4) жордановы дуги, из которых можно составить границы $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ соответственно областей $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_n$. При этом каждая дуга L_i лежащая на границе области Ω , является частью границы только одного из множеств $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_n$, причем ориентации на этой дуге, порожденные ориентацией границы Ω и ориентацией границы соответствующей области \mathcal{O}_j , одинаковы. Дуги L_i , лежащие внутри Ω , являются частями границы двух областей \mathcal{O}_{j_1} и \mathcal{O}_{j_2} , причем ориентации на таких дугах, порождаемые разными областями, различны.

Из проведенных рассуждений вытекает, что сумма вращений поля Φ на всех границах $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ областей $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_n$ равна вращению $\gamma(\Phi, \Gamma)$ поля Φ на границе Γ области Ω :

$$\gamma(\Phi; \Gamma) = \gamma(\Phi; \Pi_1) + \gamma(\Phi; \Pi_2) + \dots + \gamma(\Phi; \Pi_n), \quad (3.3)$$

так как вращение на каждой замкнутой кривой, из которых состоит Γ , и на каждой замкнутой кривой $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ равно сумме вращений на тех дугах L_i , из которых эти замкнутые кривые состоят.

На каждой кривой Π_i вращение $\gamma(\Phi; \Pi_i)$ поля Φ равно нулю, так как на ней нет точек, в которых векторы поля направлены противоположно (см. п. 1.5). Таким образом, из (3.3) вытекает, что $\gamma(\Phi, \Gamma) = 0$.

Теорема доказана.

3.3. Особая точка и ее индекс. Пусть векторное поле Φ задано и непрерывно во всех точках области Ω , кроме, может быть, некоторых. Те точки области, в

²На доказательстве этого геометрически очевидного факта мы не останавливаемся. Для дальнейших построений, по существу, достаточно знать, что на указанные части можно разбить круговое кольцо и область, граница которой состоит из отрезков и дуг окружностей.

которых поле неопределенно или разрывно, а также точки, в которых векторы поля равны нулю, назовем *особыми точками* поля Φ .

Особая точка M_0 называется, как обычно, *изолированной*, если в некоторой ее окрестности нет других особых точек. Поле Φ на каждой окружности достаточно малого радиуса с центром в изолированной особой точке M_0 не имеет нулевых векторов. Поле Φ на кольце, заключенном между двумя такими окружностями S_1 и S_2 (рис. 3.5), также не имеет нулевых векторов. В силу теоремы 3.1

$$\gamma(\Phi; S_2) + \gamma(\Phi, -S_1) = 0,$$

то есть вращение поля на окружностях S_1 и S_2 одинаково. Это общее вращение называется *индексом особой точки* M_0 .

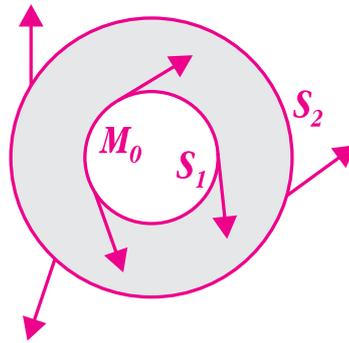


Рис. 3.5

Подчеркнем, что понятие индекса относится лишь к изолированным особым точкам.

Упражнение 3.2. Вычислить индекс особой точки $M_0 = (0, 0)$ следующих векторных полей:

- 1) $\Phi(x, y) = (x, y)$,
- 2) $\Phi(x, y) = (y, -x)$,
- 3) $\Phi(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$,
- 4) $\Phi(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$,
- 5) $\Phi(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$,
- 6) $\Phi(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$.

Вычисление индекса особой точки является важной и в ряде случаев трудной задачей. Вычислению индекса полностью посвящена вторая глава книги и дополнение.

3.4. Теорема об алгебраическом числе особых точек. Пусть поле Φ на замкнутой области $\bar{\Omega}$ с границей Γ имеет конечное число особых точек M_1, M_2, \dots, M_k , лежащих внутри Ω . Индексы этих особых точек обозначим через $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$. Сумма $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k$ называется *алгебраическим числом особых точек*.

Теорема 3.2. Алгебраическое число особых точек равно вращению поля Φ на Γ .

Доказательство. Опишем вокруг каждой точки M_i ($i = 1, \dots, k$) окружность S_i настолько малого радиуса, чтобы ограниченные этими окружностями круги T_i , не имели общих точек друг с другом и с границей Γ области Ω (См. рис. 3.6). Обозначим через Ω^* область, граница Γ^* которой состоит из границы Γ области Ω и их всех окружностей S_1, \dots, S_k . В силу теоремы 3.1 вращение $\gamma(\Phi; \Gamma^*)$ равно нулю. Но

$$\gamma(\Phi; \Gamma^*) = \gamma(\Phi; \Gamma) + \gamma(\Phi; -S_1) + \dots + \gamma(\Phi; -S_k),$$

и поэтому

$$\gamma(\Phi; \Gamma) = -\gamma(\Phi; -S_1) - \dots - \gamma(\Phi; -S_k) = \gamma(\Phi; S_1) + \dots + \gamma(\Phi; S_k).$$

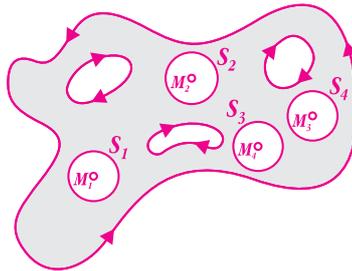


Рис. 3.6

Остается заметить, что по определению

$$\gamma(\Phi; S_1) = \gamma_1, \dots, \gamma(\Phi; S_k) = \gamma_k.$$

Теорема доказана.

Теоремой 3.2 можно пользоваться в двух планах. Можно по индексам всех особых точек вычислять вращение на границе области. Можно по вращению $\gamma(\Phi; \Gamma)$ на границе Γ области и по индексам известных особых точек делать вывод о существовании неизвестных нам особых точек, если вращение $\gamma(\Phi; \Gamma)$ окажется отличным от суммы индексов известных нам особых точек.

Упражнение 3.3. Вычислить вращение на границе указанной на рис. 3.7 фигуры векторных полей из упражнения 3.2.

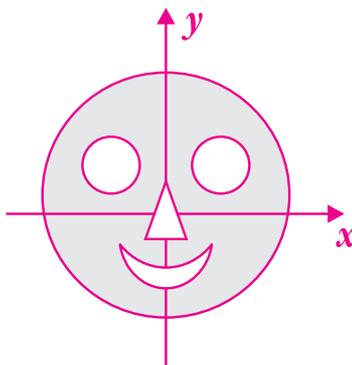


Рис. 3.7

3.5. Продолжение векторных полей. Непрерывное векторное поле $\tilde{\Phi}$, определенное на множестве $\tilde{\mathcal{M}}$, будем называть *непрерывным продолжением* поля Φ , определенного на множестве \mathcal{M} , если $\mathcal{M} \subseteq \tilde{\mathcal{M}}$ и если на \mathcal{M} поля Φ и $\tilde{\Phi}$ совпадают. В тех случаях, когда это не может привести к недоразумениям, мы будем обозначать поле и его продолжение одинаковым символом.

Продолжение непрерывного векторного поля равносильно продолжению двух непрерывных функций — компонент векторного поля. Непрерывные функции, заданные на замкнутом множестве плоскости, всегда можно продолжить с сохранением непрерывности на всю плоскость³. Таким образом, вопрос о существовании непрерывного продолжения векторного поля не возникает. Нас в этом пункте будет интересовать возможность построения специальных продолжений — либо продолжений без нулевых векторов, либо продолжений с минимальным числом нулевых векторов.

Если векторное поле Φ задано только на концах жордановой дуги и отлично от нуля, то его непрерывное продолжение без нулевых векторов на всю дугу легко построить, поворачивая вектор поля при движении по кривой и непрерывно меняя его длину. На детальном доказательстве мы не останавливаемся.

Упражнение 3.4. Пусть непрерывное векторное поле без нулевых векторов задано на замкнутом множестве F замкнутой кривой Γ . Как построить непрерывное продолжение этого поля без нулевых векторов на всю кривую Γ ?

Предположим теперь, что поле

$$\Phi(x, y) = (\phi(x, y), \psi(x, y)) \quad (3.4)$$

на окружности $x^2 + y^2 = R^2$ не имеет нулевых векторов. Непрерывное продолжение этого поля на круг $x^2 + y^2 \leq R^2$ может быть определено, например, равенством

$$\Phi(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} \Phi \left(\frac{Rx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{Ry}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right). \quad (3.5)$$

Это продолжение представляет для нас тот интерес, что оно имеет лишь одну особую точку (лишь в одной точке продолженное поле аннулируется).

Каждая замкнутая область $\bar{\Omega}$, границей которой является замкнутая жорданова кривая Γ , гомеоморфна единичному кругу. Это значит, что существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение B области $\bar{\Omega}$ на круг K ; при этом Γ переходит в границу (окружность) круга K . Пусть на Γ задано непрерывное поле Φ без нулевых векторов. Определим на единичной окружности поле Ψ равенством

$$\Psi(M) = \Phi(B^{-1}(M)).$$

Поле Ψ продолжим на круг K с одной особой точкой. Тогда поле

$$\tilde{\Phi}(M) = \tilde{\Psi}(B(M))$$

³Эта теорема была доказана **Л. Брауэром**, а в значительно более общей форме установлена **П.С. Урысоном** (см. **П.С. Александров**, *Введение в общую теорию множеств и функций*, Гостехиздат, 1948, стр. 284).

будет непрерывным продолжением с одной особой точкой поля Φ с кривой Γ на $\bar{\Omega}$. Таким образом, непрерывное поле без нулевых векторов можно непрерывно продолжить с одной особой точкой с замкнутой кривой на ограниченную этой кривой область.

Рассмотрим более сложный случай, когда непрерывное поле Φ без нулевых векторов задано на состоящей из нескольких замкнутых кривых границе Γ области Ω . Область Ω можно дополнительными дугами L_1, L_2, \dots, L_k рассматриваемыми как разрезы (см. рис. 3.8), превратить в односвязную область. Поле Φ на дополнительные дуги можно продолжить без нулевых векторов. После этого мы получим непрерывное векторное поле на границе односвязной области, границей которой является замкнутая кривая (каждый разрез дает два участка этой кривой). По уже доказанному поле можно продолжить с одной неподвижной точкой.

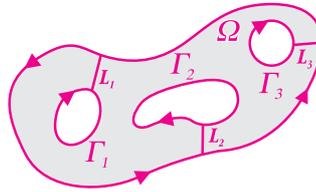


Рис. 3.8

Доказанный факт справедлив и для общего случая связной области Ω с границей Γ . Для этого вначале непрерывно продолжим поле Φ произвольным образом. Множество F особых точек этого продолжения Φ_1 будет замкнуто и будет находиться на положительном расстоянии δ_0 от Γ . Рассмотрим множество всех открытых кругов радиуса $\frac{\delta_0}{2}$ с центрами в точках множества F и выберем из этих кругов конечное покрытие множества F . Объединение этих кругов \mathcal{K} является открытым множеством. Векторное поле Φ_1 , рассматриваемое только на $\bar{\Omega} \setminus \mathcal{K}$, обозначим через Φ_2 . Множество \mathcal{K} является объединением конечного числа кругов; поэтому оно состоит из конечного числа компонент $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_r$. Продолжим поле Φ_2 в поле Φ_3 , определенное на всем $\bar{\Omega}$ и имеющее в каждой компоненте не более одной особой точки. Поле Φ_3 будет продолжением поля Φ на $\bar{\Omega}$ с конечным числом особых точек. Так как область Ω связна, то можно все особые точки поля Φ_3 соединить ломаной Π , лежащей внутри Ω . Пусть расстояние от Π до Γ равно δ_1 . Через \mathcal{K}^* обозначим $\frac{\delta_1}{2}$ -окрестность кривой Π . Поле Φ_3 , рассматриваемое только на $\bar{\Omega} \setminus \mathcal{K}^*$, обозначим через Φ_4 ; поле Φ_4 будет непрерывным продолжением поля Φ без нулевых векторов с Γ на $\bar{\Omega} \setminus \mathcal{K}^*$. Область \mathcal{K}^* связна, и граница ее состоит из конечного числа кривых, поэтому поле Φ_4 можно продолжить непрерывно с одной особой точкой на \mathcal{K}^* . Полученное поле Φ_5 будет непрерывным продолжением поля Φ с Γ на $\bar{\Omega}$, имеющим только одну особую точку.

3.6. Продолжение без нулевых векторов. Особый интерес представляет возможность продолжения векторного поля на всю область без нулевых векторов. Из теоремы 3.1 вытекает, что такие продолжения можно строить лишь в том слу-

чае, если вращение $\gamma(\Phi; \Gamma)$ поля Φ на Γ равно нулю. Оказывается, что справедливо и обратное утверждение.

Теорема 3.3. Пусть вращение векторного поля Φ на границе $(\nu + 1)$ -связной области Ω , граница Γ которой состоит из $\nu + 1$ замкнутой жордановой кривой, равно нулю.

Тогда поле Φ можно непрерывно продолжить на Ω без нулевых векторов.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда поле Φ задано на окружности S , центр которой без ограничения общности можно считать расположенным в начале координат. Окружность S зададим в параметрической форме:

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Векторное поле Φ полностью определяется угловой функцией $\theta(t)$ и функцией $r(t) = \|\Phi(t)\|$.

Поле $\tilde{\Phi}$ на круге $x^2 + y^2 \leq R^2$ зададим, используя полярные координаты ρ, t ($x = \rho \cos t, y = \rho \sin t$). Положим

$$\|\tilde{\Phi}(\rho, t)\| = \frac{Rr(t)}{\rho + (R - \rho)r(t)} \quad (0 \leq \rho \leq R, 0 \leq t \leq 2\pi)$$

и

$$\alpha(\rho, t) = \frac{\rho}{R} \theta(t), \quad (0 \leq \rho \leq R, 0 \leq t \leq 2\pi),$$

где через $\alpha(\rho, t)$ обозначен угол между вектором $\tilde{\Phi}(\rho, t)$ и вектором $\Phi(0)$. Легко видеть, что $\tilde{\Phi}(\rho, t)$ является непрерывным продолжением без нулевых векторов на круг (проверьте!).

Перейдем к общему случаю. Как было показано в предыдущем пункте, можно построить продолжение Φ_1 поля Φ на область Ω с одной особой точкой M_0 .

Из теоремы 3.2 вытекает, что индекс этой особой точки равен нулю.

Обозначим через K круг с центром в точке M_0 , полностью лежащий в Ω . На границе S этого круга в силу той же теоремы 3.2 вращение поля Φ_1 равно нулю. Через Φ_2 обозначим поле, определенное на $\Omega \setminus K$ и совпадающее на этом множестве с Φ_1 . По уже доказанному поле Φ_2 можно продолжить на круг K без нулевых векторов.

Теорема доказана.

Упражнение 3.5. Можно ли продолжить без нулевых векторов на квадрат $|x| + |y| \leq 1$ векторное поле $\Phi(x, y)$, заданное на границе равенствами

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{при } x, y \geq 0, \\ (0, 1) & \text{при } x \leq 0, y \geq 0, \\ (y + 1, x + 1) & \text{при } x, y \leq 0 \\ (1, 0) & \text{при } x \geq 0, y \leq 0 \end{cases}$$

Упражнение 3.6. Можно ли продолжить без нулевых векторов на круговое кольцо $1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ векторное поле Φ , векторы которого на внешней окружности определяются равенством $\Phi(x, y) = (x, y)$, а на внутренней — равенством $\Phi(x, y) = (-x, y)$?

§ 4. Гомотопные векторные поля

4.1. Определение гомотопности. Пусть на некотором ограниченном замкнутом множестве \mathfrak{M} задано однопараметрическое семейство векторных полей $\Phi(M, \lambda)$ ($M \in \mathfrak{M}$; $0 \leq \lambda \leq 1$). Допустим, что вектор-функция $\Phi(M, \lambda)$ непрерывна по совокупности переменных и не имеет нулевых векторов. В этом случае будем говорить, что семейство $\Phi(M, \lambda)$ (или вектор-функция $\Phi(M, \lambda)$) *гомотопно соединяет* поля

$$\Phi_0(M) = \Phi(M, 0), \quad \Phi_1(M) = \Phi(M, 1).$$

Если два поля Φ и Ψ можно гомотопно соединить некоторым семейством, то поля Φ и Ψ называются *гомотопными*.

Нетрудно видеть, например, что каждое непрерывное поле $\Phi(M)$ без нулевых векторов гомотопно полю $\Phi(M) = -\Phi(M)$ векторов той же длины, но противоположно направленных. Для доказательства достаточно рассмотреть вектор-функцию $\Phi(M, \lambda)$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), значения которой при каждом λ получаются из векторов $\Phi(M)$ поворотом на угол $\pi\lambda$.

Аналогично поле $\Phi(M)$ гомотопно каждому полю, полученному из поля $\Phi(M)$ поворотом на некоторый постоянный угол.

Упражнение 4.1.

1) Пусть семейство $\Phi(M, \lambda)$ гомотопно соединяет некоторые два поля. Показать, что поля $\Phi(M, \lambda_1)$ и $\Phi(M, \lambda_2)$ при любых $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ гомотопны.

2) Пусть поле $\Phi(M)$ непрерывно и не имеет нулевых векторов. Показать, что оно гомотопно нормированному полю

$$\Phi_1(M) = \frac{\Phi(M)}{\|\Phi(M)\|}.$$

Предоставляем читателю показать, что гомотопность обладает обычными свойствами понятия эквивалентности: *рефлексивностью* (поле гомотопно самому себе), *симметрией* (если Φ гомотопно Ψ , то Ψ гомотопно Φ), *транзитивностью* (если Φ гомотопно Ψ , а Ψ гомотопно X , то Φ гомотопно X). Поэтому понятие гомотопности разбивает все непрерывные векторные поля без нулевых векторов на \mathfrak{M} на классы полей, гомотопных друг другу.

Упражнение 4.2. Докажите, что любые непрерывные векторные поля без нулевых векторов на незамкнутой кривой гомотопны друг другу.

Основной интерес представляет понятие гомотопности для векторных полей, заданных на замкнутых жордановых кривых и на более сложных границах ограниченных областей.

4.2. Основная теорема. В этом пункте Γ — состоящая из $\nu + 1$ замкнутой кривой граница $\nu + 1$ -связной области.

Теорема 4.1. Если поля Φ и Ψ на Γ гомотопны, то их вращение одинаково.

Доказательство. Из формулы (3.1) вытекает, что утверждение теоремы достаточно доказать для случая, когда Γ — одна замкнутая кривая. Пусть она задана в параметрической форме равенствами

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b). \quad (4.1)$$

Обозначим через $\Phi(M, \lambda)$ вектор-функцию, гомотопно соединяющую поля Φ и Ψ , и обозначим через $\theta(t, \lambda)$ зависящую от λ угловую функцию полей $\Phi(M, \lambda)$ при параметризации (4.1). Угловая функция $\theta(t, \lambda)$ непрерывна по совокупности переменных $a \leq t \leq b$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Поэтому и вычисленное в единицах полного оборота ее полное приращение $\gamma(\lambda)$ по t ,

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{2\pi} (\theta(b, \lambda) - \theta(a, \lambda)),$$

будет непрерывной функцией параметра λ . Это полное приращение $\gamma(\lambda)$ является вращением векторного поля $\Phi(M, \lambda)$ и, следовательно, есть число целое. Остается заметить, что непрерывная на отрезке функция, принимающая целочисленные значения, есть константа.

Теорема доказана.

Из теоремы 4.1 вытекает сразу же, что существуют негомотопные поля. Теорема 4.1 дает метод вычисления вращения — она позволяет переходить к более простым полям. Этот метод будет в дальнейшем основным.

4.3. Обратная теорема.

Теорема 4.2 (Брауэр-Хопф). Пусть векторные поля Φ и Ψ на замкнутой жордановой кривой Γ имеют одинаковое вращение γ .

Тогда поля Φ и Ψ на Γ гомотопны.

Доказательство. Если векторное поле нормировать, то мы получим гомотопное ему поле (см. упражнение 4.1, 2). Поэтому без ограничения общности можно считать, что поля Φ и Ψ состоят из векторов единичной длины.

Векторное поле гомотопно полю, полученному из него поворотом на некоторый угол. Поэтому без ограничения общности можно считать, что векторы полей Φ и Ψ одинаково направлены в точке M_0 , соответствующей значению параметра $t = a$ в параметрическом представлении (4.1) кривой Γ , и, более того, что их направление совпадает с положительным направлением оси абсцисс. Пусть $\theta_0(t)$ и $\theta_1(t)$ — угловые функции полей Φ и Ψ ; очевидно,

$$\theta_0(a) = \theta_1(a) = 0, \quad \theta_0(b) = \theta_1(b) = 2\pi\gamma.$$

Поля Φ и Ψ можно гомотопно соединить вектор-функцией

$$\Phi(M; \lambda) = \Phi(t, \lambda) = (\cos((1 - \lambda)\theta_0(t) + \lambda\theta_1(t)), \sin((1 - \lambda)\theta_0(t) + \lambda\theta_1(t))),$$

непрерывность которой очевидна.

Теорема доказана.

Упражнение 4.3. Показать, что векторные поля с одинаковым вращением на Γ могут быть негомотопны, если Γ состоит более чем из одной замкнутой кривой.

4.4. Признаки гомотопности. Допустим, что в каждой точке M множества \mathfrak{M} векторы полей $\Phi(M)$ и $\Psi(M)$ не направлены противоположно. Тогда вектор-функция

$$\Phi(M; \lambda) = (1 - \lambda)\Phi(M) + \lambda\Psi(M) \quad (M \in \mathfrak{M}, 0 \leq \lambda \leq 1) \quad (4.2)$$

не будет принимать нулевых значений и будет гомотопно соединять поля Φ и Ψ . Таким образом, имеет место

Теорема 4.3 (Пуанкаре – Боль). Если векторы полей Φ и Ψ ни в одной точке не направлены противоположно, то поля гомотопны.

Отсюда вытекает, что поля Φ и Ψ гомотопны, если ни в одной точке векторы этих полей не направлены одинаково. Для доказательства достаточно вспомнить, что поля Φ и $-\Phi$ гомотопны, и воспользоваться теоремой 4.3. Из теоремы 4.3 можно получить следствия и другого типа.

Теорема 4.4. Пусть поля Φ и Ψ на границе Γ области Ω имеют различные вращения.

Тогда по крайней мере в одной точке векторы полей Φ и Ψ направлены одинаково и по крайней мере в одной точке направлены противоположно.

Доказательство. В предположении противного поля Φ и Ψ в силу теоремы 4.3 гомотопны. В силу теоремы 4.1 их вращения должны быть одинаковы, и мы приходим к противоречию.

Выбирая в качестве поля Ψ некоторое фиксированное поле, можно из теоремы 4.4 получить различные любопытные выводы. Например, из теорем 2.3 и 2.4 вытекает

Теорема 4.5. Пусть вращение поля Φ на гладкой замкнутой кривой Γ отлично от 1.

Тогда по крайней мере один вектор поля направлен по внешней нормали к кривой, по крайней мере один — по внутренней нормали к кривой, по крайней мере два — по касательной к кривой.

В приложениях удобно пользоваться утверждением, более частным чем теорема 4.3.

Будем говорить, что векторное поле $\Psi(M)$ является *главной частью* поля $\Phi(M)$, если $\Phi(M)$ можно представить в виде

$$\Phi(M) = \Psi(M) + \omega(M), \quad (4.3)$$

где

$$\|\omega(M)\| < \|\Psi(M)\|. \quad (4.4)$$

Векторы полей $\Phi(M)$ и $\Psi(M)$ ни в одной точке не направлены противоположно, так как из равенства

$$\Phi(M_0) = -\alpha_0\Psi(M_0) \quad (\alpha_0 > 0)$$

следовало бы равенство

$$(1 + \alpha_0)\Psi(M_0) = -\omega(M_0),$$

которое противоречит (4.4). Поэтому из теоремы 4.3 вытекает

Теорема 4.6 (Руше). *Векторное поле $\Phi(M)$ гомотопно своей главной части.*

Будем говорить, что векторное поле Φ выпускает направление Φ_0 , если ни в одной точке направление векторов поля не совпадает с направлением Φ_0 . Из теоремы 4.3 вытекает тогда, что поле Φ гомотопно полю одинаково направленных векторов. Следовательно, верна следующая простая и важная

Теорема 4.7. *Если поле Φ на кривой Γ выпускает некоторое направление, то его вращение на Γ равно нулю.*

Упражнение 4.4.

1) Показать, что на окружностях $x^2 + y^2 = r^2$ малого радиуса r векторное поле

$$\Phi(x, y) = (x + x^2 + y^2, y + x^2 + y^2) \quad (4.5)$$

гомотопно полю $\Psi_0(x, y) = (x, y)$, а на окружностях большого радиуса — полю $\Psi_\infty(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 + y^2)$ (воспользоваться теоремой Руше).

2) Найти все особые точки поля (4.5) и вычислить их индексы (воспользоваться теоремой об алгебраическом числе особых точек).

4.5. Векторные поля, близкие к нечетным.

Теорема 4.8. *Пусть заданное на окружности непрерывное векторное поле Φ без нулевых векторов обладает тем свойством, что в диаметрально противоположных точках окружности векторы поля не направлены одинаково.*

Тогда вращение поля нечетно.

Доказательство. Обозначим через B отображение окружности Γ в себя, при котором каждая точка переходит в диаметрально противоположную. Условие теоремы означает, что векторы $\Phi(M)$ и $\Phi(B(M))$ ($M \in \Gamma$) не направлены одинаково.

Тогда вектор-функция

$$\Phi(M, \lambda) = \Phi(M) - \lambda\Phi(B(M)) \quad (0 \leq \lambda \leq 1, M \in \Gamma) \quad (4.6)$$

гомотопно соединяет поле $\Phi(M)$ и поле

$$\Psi(M) = \Phi(M) - \Phi(B(M)). \quad (4.7)$$

Поле (4.7) очевидным образом обладает свойством нечетности

$$\Psi(B(M)) = \Phi(B(M)) - \Phi(B^2(M)) = \Phi(B(M)) - \Phi(M) = -\Psi(M).$$

В силу теоремы 2.2 вращение поля $\Psi(M)$ нечетно. Но тогда и вращение гомотопного поля $\Phi(M)$ нечетно.

Теорема доказана.

Упражнение 4.5. Показать, что вращение поля на замкнутой кривой Γ нечетно, если векторы поля направлены неодинаково в точках M и $A(M)$ ($M \in \Gamma$), где A — непрерывная инволюция на Γ (см. упражнение 2.7).

4.6. Вращение на границе произвольной области. До сих пор понятие вращения было определено лишь для полей на границах $(\nu + 1)$ -связных областей Ω , состоящих из $\nu + 1$ замкнутой жордановой кривой. Перейдем к рассмотрению векторных полей Φ без нулевых векторов на границе Γ произвольной связной области Ω .

Поле Φ можно (см. п. 3.5) непрерывно продолжить на область Ω так, чтобы продолженное поле $\tilde{\Phi}$ имело конечное число особых точек. Сумму индексов этих особых точек назовем *вращением поля Φ на Γ* .

Чтобы это определение было корректным, нужно доказать, что оно не зависит от способа построения продолжения Φ .

Пусть $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$ — два таких продолжения. Из равномерной непрерывности полей $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$ вытекает существование такого $\delta_0 > 0$, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Phi}_1(M_1) - \tilde{\Phi}_1(M_2)\| &< \frac{m}{3}, \\ \|\tilde{\Phi}_2(M_1) - \tilde{\Phi}_2(M_2)\| &< \frac{m}{3}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

где m — наименьшая длина векторов $\Phi(M)$ на Γ , если только расстояние между точками $M_1, M_2 \in \bar{\Omega}$ не превышает δ_0 .

В точках области Ω , находящихся от Γ на расстоянии, не превышающем δ_0 , в силу (4.8) нет особых точек ни у поля $\tilde{\Phi}_1$, ни у поля $\tilde{\Phi}_2$.

Обозначим через Ω^* такую связную область, содержащуюся в Ω , граница которой Γ^* состоит из конечного числа жордановых замкнутых кривых и все точки границы находятся от Γ на расстоянии, не превышающем δ_0 . На построении области Ω^* мы не останавливаемся.

Для каждой точки $M^* \in \Gamma^*$ найдется точка $M \in \Gamma$, расстояние которой от M^* не превышает δ_0 . Поэтому

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Phi}_1(M^*) - \Phi(M)\| &= \|\tilde{\Phi}_1(M^*) - \tilde{\Phi}_1(M)\| < \frac{m}{3}, \\ \|\tilde{\Phi}_2(M^*) - \Phi(M)\| &= \|\tilde{\Phi}_2(M^*) - \tilde{\Phi}_2(M)\| < \frac{m}{3}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Phi}_1(M^*) - \tilde{\Phi}_2(M^*)\| &\leq \|\tilde{\Phi}_1(M^*) - \Phi(M)\| + \\ &+ \|\tilde{\Phi}_2(M^*) - \Phi(M)\| < \frac{2m}{3} \leq \frac{2}{3}\|\Phi(M)\|. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\|\tilde{\Phi}_1(M^*)\| \geq \|\Phi(M)\| - \|\tilde{\Phi}_1(M^*) - \Phi(M)\| \geq \|\Phi(M)\| - \frac{m}{3} \geq \frac{2}{3}\|\Phi(M)\|.$$

Таким образом,

$$\|\tilde{\Phi}_1(M^*) - \tilde{\Phi}_2(M^*)\| < \|\tilde{\Phi}_1(M^*)\|.$$

Полученное неравенство означает, что поле $\tilde{\Phi}_1$ на Γ^* является главной частью поля $\tilde{\Phi}_2$. Из теоремы 4.6 Руше вытекает, что вращение полей $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$ на Γ^* одинаково. Значит, одинакова сумма индексов особых точек полей $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$ в области Ω . Это и означает, что понятие вращения было введено корректно.

Приведенное определение вращения в случае области, граница которой состоит из конечного числа замкнутых жорлановых кривых, совпадает с обычным — это следует из теоремы 3.2.

Предоставляем читателю проверить справедливость для векторных полей на границе произвольной ограниченной области теорем 3.3, 4.1, 4.3, 4.4, 4.6, 4.7. Некоторых дополнительных рассуждений требует при этом лишь теорема 4.1. Теоремы 3.1 и 3.2 следуют из определения.

4.7. О векторных полях на двумерных многообразиях. Пусть L — кусок гладкой поверхности. Вектор Φ называется *касательным к поверхности в точке M* , если он лежит в плоскости, касательной к L в точке M (рис. 4.1).

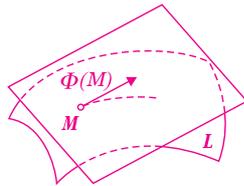


Рис. 4.1

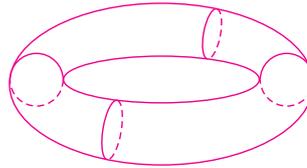
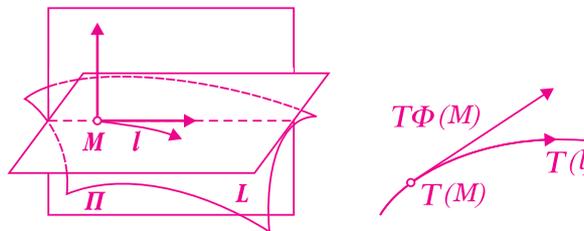


Рис. 4.2

Допустим, что L при помощи дифференцируемого преобразования T гомеоморфно отображена на некоторую плоскую замкнутую область $\bar{\Omega}$. Поле Φ , заданное на L , естественным образом⁴ переходит в плоское поле, заданное на $\bar{\Omega}$. Изу-

⁴Чтобы построить образ вектора $\Phi(M)$, нужно через точку M , вектор $\Phi(M)$ и нормаль к поверхности L провести плоскость Π и на пересечении l этой плоскости с поверхностью L задать направление, как указано на рис. а. Кривая l при преобразовании T перейдет в некоторую пло-



а) б)

Рис. а), б)

скую кривую s , лежащую в Ω ; эту кривую вместе с ее естественной ориентацией обозначим через

чение каждого поля касательных векторов к такой поверхности L эквивалентно рассмотрению соответствующего векторного поля на плоскости.

Однако не каждая поверхность гомеоморфна некоторой плоской области. Примерами могут служить тор (рис. 4.2) или сфера (поверхность шара). При изучении векторных полей на таких поверхностях L возникают специфические трудности, вызванные топологической структурой L . Отметим, например, такой факт: *на поверхности тора может быть построено непрерывное поле касательных векторов (как ?), а на сфере нет.*

Последнее утверждение совершенно неочевидно. Приведем схему одного из возможных доказательств.

Допустим, что на единичной сфере S можно построить непрерывное поле $\Phi(M)$ касательных векторов. Проведем горизонтальную плоскость Π , касательную к сфере S (в ее южном полюсе). Через $T(M)$ обозначим стереографическую проекцию точки $M \in S$ на плоскость Π , то есть $T(M)$ — это точка пересечения с плоскостью Π луча, проходящего через точку M и через северный полюс O сферы S . Через L обозначим часть сферы, состоящую из точек, расположенных южнее некоторой параллели Γ (см. рис. 4.3). При стереографической проекции T область L переходит в круг; поле $T\Phi$ на этом круге не имеет особых точек, и поэтому вращение его на граничной окружности Γ^* (образе Γ) равно нулю.

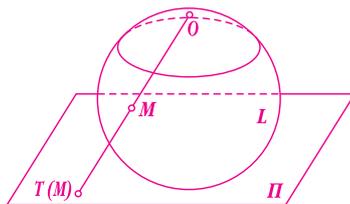


Рис. 4.3

С другой стороны, если параллель Γ взята на достаточно высоких северных широтах (близко к северному полюсу), то векторы поля Φ на этой параллели направлены с точностью до малых высших порядков одинаково. Геометрически очевидно, что поле $T\Phi$ на Γ^* будет при этом иметь такой вид, который указан на рис. 4.4. Вращение этого поля по модулю равно двум, и мы пришли к противоречию.

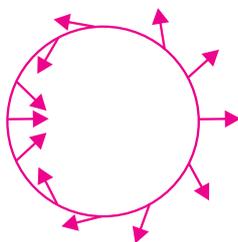


Рис. 4.4

$T(l)$. Вектор, касательный к $T(l)$ в точке $T(M)$, будем считать образом $T\Phi(M)$ вектора $\Phi(M)$ при преобразовании T (см. рис. б). Для определенности можно считать, что длина вектора $T\Phi(M)$ такая же, как длина вектора $\Phi(M)$.

Упражнение 4.6. Будем рассматривать на сфере непрерывные векторные поля, составленные из ненулевых векторов, произвольно расположенных в пространстве (эти векторы не обязаны быть касательными к сфере). Доказать, что каждое такое поле в некоторой точке имеет вектор, направленный по внешней или внутренней нормали (использовать теорему о том, что на сфере не может быть построено непрерывное поле касательных ненулевых векторов).

Сформулированное утверждение называют *теоремой о ежсе*.

4.8. Произведение вращений. Пусть T — непрерывное отображение единичной окружности на себя; вращение векторного поля $T(M)$ на этой окружности обозначим через $\gamma(T)$.

Рассмотрим на замкнутой кривой Γ нормированное векторное поле $\Phi(M)$ и поле⁵

$$\Psi(M) = T\Phi(M).$$

Теорема 4.9 (О произведении вращений). Вращения $\gamma(\Phi)$ и $\gamma(\Psi)$ полей Φ и Ψ на Γ связаны равенством

$$\gamma(\Psi) = \gamma(T)\gamma(\Phi).$$

Доказательство. В силу теоремы 4.2 можно построить непрерывную вектор-функцию $\Phi(M, \lambda)$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), гомотопно соединяющую поле $\Phi(M)$ с полем $\Phi_0(M)$, угловая функция $\theta_0(t)$ которого имеет вид

$$\theta_0(t) = \frac{2\pi\gamma(\Phi)}{b-a} (t-a) \quad (a \leq t \leq b). \quad (4.9)$$

Без ограничения общности можно считать при этом, что вектор-функция $\Phi(M, \lambda)$ нормирована.

Аналогично поле $T(M)$ можно гомотопно соединить нормированной вектор-функцией $T(M; \lambda)$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) с полем $T_0(M)$; угловая функция $\theta_1(\tau)$ имеет вид

$$\theta_1(\tau) = \gamma(T)\tau \quad (0 \leq \tau \leq 2\pi). \quad (4.10)$$

В формуле (4.9) t — параметр на кривой Γ , в формуле (4.10) τ — полярный угол, который служит параметром на единичной окружности.

Вектор-функция $T[\Phi(M, \lambda), \lambda)$ очевидным образом гомотопно соединяет векторное поле Ψ с полем $\Psi_0(M) = T_0(\Phi_0(M))$. В силу теоремы 4.1 вращения этих полей одинаковы. Угловая функция $\theta(t)$ поля Ψ_0 имеет вид

$$\theta(t) = \gamma(T) \frac{2\pi \gamma(\Phi)}{b-a} (t-a) \quad (a \leq t \leq b),$$

⁵Здесь и часто в дальнейшем мы пользуемся одинаковым обозначением для точек и их радиус-векторов.

откуда следует, что вращение поля Ψ_0 равно $\gamma(T)\gamma(\Phi)$.

Теорема доказана.

Упражнение 4.7.

1) Пусть на замкнутой жордановой кривой Γ заданы три векторных поля X , Y , Φ без нулевых векторов, первые два из которых обладают тем свойством, что в каждой точке $M \in \Gamma$ векторы $X(M)$ и $Y(M)$ направлены не одинаково и не противоположно. При каждом фиксированном M представим вектор $\Phi(M)$ в виде

$$\Phi(M) = \xi(M)X(M) + \eta(M)Y(M).$$

Через $\Psi(M)$ обозначим векторное поле, определенное равенством

$$\Psi(M) = \xi(M)X(M_0) + \eta(M)Y(M_0), \quad (4.11)$$

где M_0 — некоторая фиксированная точка на Γ .

Вращения полей X и Y одинаковы в силу теоремы 4.3 Пуанкаре – Боля; общее вращение этих полей обозначим через γ_0 .

Покажите, что вращения $\gamma(\Phi)$ и $\gamma(\Psi)$ полей Φ и Ψ связаны равенством (теорема о сложении вращений)

$$\gamma(\Phi) = \gamma_0 + \gamma(\Psi). \quad (4.12)$$

2) При помощи теоремы о сложении вращений покажите, что теорема о нечетности вращения нечетного поля вытекает из теоремы о четности вращения четного поля (и наоборот).

3) Как изменится формула (4.12), если поле Ψ вместо равенства (4.11) определить формулой

$$\Psi(M) = (\xi(M), \eta(M)),$$

то есть, если считать $\xi(M)$ и $\eta(M)$ компонентами поля $\Psi(M)$ в основной прямоугольной системе координат?

Упражнение 4.8. Пусть даны три векторных поля

$$\Phi_i(x, y) = (\phi_i(x, y), \psi_i(x, y)) \quad (i = 1, 2, 3),$$

причем

$$\phi_3(x, y) = \phi_1(x, y)\phi_2(x, y), \quad \psi_3(x, y) = \psi_1(x, y)\psi_2(x, y).$$

Пусть нуль является изолированной особой точкой всех трех полей индексов γ_1 , γ_2 и γ_3 . Верна ли теорема о справедливости равенства $\gamma_3 = \gamma_1\gamma_2$?

4.9. Устойчивость особой точки. Расстояние между точками M_1 и M_2 будем обозначать через $\|M_1 - M_2\|$.

Изолированную особую точку M_0 непрерывного векторного поля Φ_0 будем называть *устойчивой*, если по каждому $\rho_0 > 0$ можно найти такое $\varepsilon > 0$, что каждое векторное поле Φ_ε , удовлетворяющее условию

$$\|\Phi_\varepsilon(M) - \Phi_0(M)\| < \rho_0 \quad (\|M - M_0\| \leq \rho_0), \quad (4.13)$$

имеет по крайней мере одну особую точку M_ε , удовлетворяющую неравенству

$$\|M_\varepsilon - M_0\| < \rho_0. \quad (4.14)$$

Допустим, что индекс γ точки M_0 равен нулю. Из непрерывности векторного поля Φ_0 вытекает, что по каждому $\varepsilon > 0$ можно найти такой круг K_ε с центром в M_0 , на котором длины векторов $\Phi_0(M)$ меньше ε . Вращение поля Φ на окружности S_ε , являющейся границей круга K_ε равно нулю. Поэтому поле Φ_0 с окружности S_ε можно непрерывно продолжить на K_ε без нулевых векторов, причем без ограничения общности можно считать, что длины векторов продолженного поля Φ_ε не превышают ε . Сохраним обозначение Φ_ε за полем, которое вне круга K_ε совпадает с Φ_0 . Очевидное неравенство

$$\|\Phi_\varepsilon(M) - \Phi_0(M)\| \leq 2\varepsilon,$$

отсутствие у поля Φ_ε , в окрестности точки M_0 особых точек, произвольность ε — все это означает, что особая точка с нулевым индексом неустойчива.

Если же индекс особой точки M_0 отличен от нуля, то на малых окружностях S с центром в M_0 вращение поля Φ_0 отлично от нуля. Поэтому отлично от нуля вращение на S полей Φ_ε близких к Φ_0 , так как поля Φ_ε на S гомотопны Φ_0 . Это значит, что близкие поля внутри указанных окружностей имеют особые точки.

Нами доказана

Теорема 4.10. *Изолированная особая точка непрерывного векторного поля устойчива тогда и только тогда, когда ее индекс отличен от нуля.*

§ 5. Порядок точки и степень отображения

5.1. Порядок точки относительно образа границы. Плоскость можно рассматривать как векторное пространство. Это значит, что некоторая точка O плоскости названа нулевой и что каждая точка M плоскости отождествлена с вектором OM , соединяющим точку O с точкой M . В дальнейшем мы часто не будем делать различия между векторами и точками плоскости.

Векторное поле $\Phi(M)$ на некотором множестве \mathfrak{M} можно рассматривать как отображение множества \mathfrak{M} в некоторое другое множество плоскости; это отображение мы будем обозначать той же буквой Φ . При этом отображении точка M переходит в точку $\Phi(M)$. Непрерывность поля $\Phi(M)$, очевидно, равносильна непрерывности отображения Φ .

Пусть поле $\Phi(M)$ задано на границе Γ некоторой ограниченной области Ω . Допустим, что точка N_0 не принадлежит образу Γ : $N_0 \notin \Phi(\Gamma)$.

Тогда векторное поле

$$\Phi(M, N_0) = \Phi(M) - N_0 \tag{5.1}$$

не имеет на Γ нулевых векторов. Вращение поля $\Phi(M, N_0)$ называется *порядком точки N_0 относительно образа $\Phi(\Gamma)$ границы Γ* . Этот порядок будем обозначать через $q(N_0, \Phi; \Gamma)$.

Если поле $\Phi(M)$ не имеет на Γ нулевых векторов, то его вращение — порядок нулевой точки O относительно $\Phi(\Gamma)$. Предположим, что N_0 зависит непрерывно

от некоторого параметра λ , причем при значениях λ из некоторого промежутка $[\alpha, \beta]$ точка $N_0(\lambda)$ не принадлежит $\Phi(\Gamma)$. Тогда вектор-функция

$$\Phi(M, \lambda) = \Phi(M) - N_0(\lambda)$$

будет гомотопно соединять любые два поля $\Phi(M, \lambda_1)$ и $\Phi(M, \lambda_2)$ ($\alpha \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \beta$). Это значит, что порядки всех точек $N_0(\lambda)$ относительно $\Phi(\Gamma)$ одинаковы.

Каждые две точки связного открытого множества можно соединить ломаной, которую можно задать уравнением $N = N(\lambda)$. Поэтому из предыдущего рассуждения вытекает

Теорема 5.1. Пусть \mathcal{K} — связная компонента множества точек, не принадлежащих $\Phi(\Gamma)$. Тогда порядок всех точек $N_0 \in \mathcal{K}$ относительно $\Phi(\Gamma)$ одинаков.

Одна из таких связных компонент — мы ее обозначим через \mathcal{K}_∞ — содержит внешность круга K с центром в нулевой точке O , в котором лежит $\Phi(\Gamma)$. Для каждой точки N_0 , лежащей вне круга K , направление всех векторов поля (5.1) не совпадает с направлением вектора ON_0 (см. рис. 5.1). Таким образом поле (5.1) выпускает направление ON_0 и, в силу теоремы 4.7, имеет нулевое вращение. Это значит, что порядок всех точек области \mathcal{K}_∞ относительно $\Phi(\Gamma)$ равен нулю.

Установим некоторые свойства порядка точки.

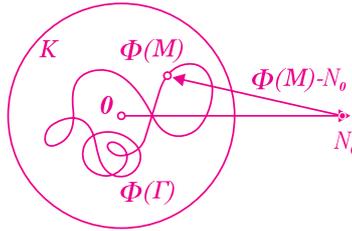


Рис. 5.1

Будем говорить, что отображения Φ и Ψ , определенные на Γ , гомотопны в плоскости с исключенной точкой N_0 , если существует непрерывная вектор-функция $\Phi(M, \lambda)$ ($M \in \Gamma$, $0 \leq \lambda \leq 1$), не принимающая значения N_0 и такая, что

$$\Phi(M, 0) = \Phi(M), \quad \Phi(M, 1) = \Psi(M) \quad (M \in \Gamma).$$

Это определение равносильно тому, что векторные поля $\Phi(M) - N_0$ и $\Psi(M) - N_0$ гомотопны. Поэтому вращения полей $\Phi(M) - N_0$ и $\Psi(M) - N_0$ одинаковы, а это значит, что порядок точки N_0 относительно $\Phi(\Gamma)$ и относительно $\Psi(\Gamma)$ одинаков.

В частности, отсюда вытекает

Теорема 5.2. Порядок $q(N_0, \Phi; \Gamma)$ не меняется при малых возмущениях поля Φ .

Предположим, что поле Φ определено на некоторой области Ω , причем $N_0 \notin \Phi(\Omega)$. Пусть кривая Γ , лежащая в области Ω , испытывает некоторую непрерывную деформацию в Ω . Это значит, что кривая Γ задана в параметрической форме

$$x = x_0(t), \quad y = y_0(t) \quad (a \leq t \leq b) \tag{5.2}$$

и ее деформация задана уравнениями

$$x = x(t, \mu), \quad y = y(t, \mu) \quad (a \leq t \leq b, \quad \alpha \leq \mu \leq \beta), \quad (5.3)$$

где непрерывные функции $x(t, \mu)$ и $y(t, \mu)$ при $\mu = \alpha$ переходят в функции $x_0(t)$ и $y_0(t)$. Тот факт, что деформация происходит в области Ω , означает принадлежность всех точек $(x(t, \mu), y(t, \mu))$ области Ω . Кривую, заданную уравнениями (5.3) при фиксированном μ , обозначим через Γ_μ .

Теорема 5.3. *Порядок точки N_0 относительно $\Phi(\Gamma)$ и относительно $\Phi(\Gamma_\mu)$ одинаков.*

Предоставляем читателю провести доказательство.

Упражнение 5.1. *Вычислить порядок точки $(0, 0)$ относительно $\Phi(\Gamma)$, если Γ — окружность $x = \cos t, y = \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) и*

1) $\Phi(x, y) = (x - a, y + b),$

2) $\Phi(x, y) = (a - x, b + y),$

3) $\Phi(t) = (\cos 3t + \cos t + \alpha, \sin 3t - \sin t + \beta)$ (рассмотреть случаи $\alpha = \pm 1, \beta = 0$ и $\alpha = 0, \beta = \pm 1$).

Упражнение 5.2. *Пусть область Ω с границей Γ разбита на части Ω_1 и Ω_2 с границами Γ_1 и Γ_2 . Пусть $N_0 \notin \Phi(\Gamma_1) \cup \Phi(\Gamma_2)$. Доказать, что*

$$q(N_0, \Phi; \Gamma_1) + q(N_0, \Phi; \Gamma_2) = q(N_0, \Phi; \Gamma). \quad (5.4)$$

5.2. Порядок точки относительно локальной простой кривой. Рассмотрим подробнее частный случай, когда Γ является замкнутой жордановой кривой, а отображение Φ локально взаимно однозначно. Образ $\Phi(\Gamma)$ называют тогда *локально простой кривой*.

Будем считать, что кривая Γ задана в параметрической форме равенствами (5.2). Отображение Φ устанавливает параметризацию на $\Phi(\Gamma)$, а следовательно, и направление обхода. Следует помнить при этом, что разным значениям параметра t соответствуют различные точки кривой Γ , но соответствующие точки локально простой кривой $\Phi(\Gamma)$ могут совпадать.

Примером локально простой кривой может служить окружность, проходимая в одном направлении несколько раз.

Допустим дополнительно, что $\Phi(\Gamma)$ можно представить как конечное число жордановых кривых, имеющих друг с другом лишь конечное число общих точек. В этом случае локально простая кривая $\Phi(\Gamma)$ имеет конечное число кратных точек (то есть, точек “самопересечения” и “самокасания”) и разбивает плоскость на конечное число односвязных областей D_1, \dots, D_n , одна из которых содержит бесконечно удаленную точку. Примеры таких разбиений показаны на рис. 5.2.

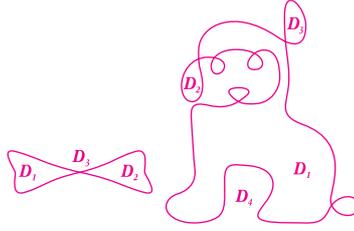


Рис. 5.2

Теорема 5.4. Для точек двух областей, граничащих друг с другом вдоль некоторой жордановой дуги L_0 , являющейся частью $\Phi(\Gamma)$, порядки относительно $\Phi(\Gamma)$ отличаются на 1. При этом порядок больше для точек той области, которая порождает на L_0 направление обхода, совпадающее с тем направлением, которое задано на локально простой кривой $\Phi(\Gamma)$.

Доказательство. В силу теоремы 5.3 без ограничения общности можно считать, что дуга L_0 — отрезок прямой, соответствующий изменению параметра t (в представлении (5.2)) на промежутке $[t_1, t_2]$. Пусть L_0 — образ дуги $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$. Остальную часть кривой обозначим через Γ_1 :

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1.$$

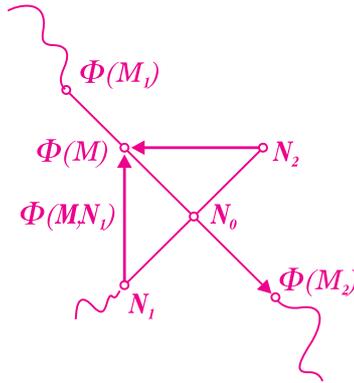


Рис. 5.3

Пусть значениям $t = t_1$ и $t = t_2$ соответствуют на локально простой кривой $\Phi(\Gamma)$ точки $\Phi(M_1)$ и $\Phi(M_2)$. Выберем в областях, частью общей границы которых является отрезок L_0 , точки N_1 и N_2 (см. рис. 5.3).

Нужно показать, что

$$1 + q(N_1, \Phi; \Gamma) = q(N_2, \Phi; \Gamma), \quad (5.5)$$

то есть, доказать, что вращения γ_1 и γ_2 полей

$$\Phi_1(M, N_1) = \Phi(M) - N_1$$

и

$$\Phi_2(M, N_2) = \Phi(M) - N_2$$

связаны соотношением

$$1 + \gamma_1 = \gamma_2. \quad (5.6)$$

Для простоты рассуждений будем считать, что точки N_1 и N_2 лежат на общем перпендикуляре к отрезку L_0 , проходящем через середину N_0 этого отрезка, и находятся от L_0 на одинаковом расстоянии ρ .

Вращения $\gamma_1(\Gamma_1, \rho)$ и $\gamma_2(\Gamma_1, \rho)$ полей $\Phi_1(M, N_1)$ и $\Phi_2(M, N_2)$ на Γ_1 стремятся к некоторому общему пределу γ_* при $\rho \rightarrow 0$, так как оба эти поля при $\rho \rightarrow 0$ переходят в поле $\Phi(M) - N_0$ без нулевых векторов на Γ_1 . Из рисунка видно, что вращения $\gamma_1(\Gamma_0, \rho)$ и $\gamma_2(\Gamma_0, \rho)$ полей $\Phi_1(M, N_1)$ и $\Phi_2(M, N_2)$ на Γ_0 при $\rho \rightarrow 0$ стремятся соответственно к $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$.

Это позволяет предельным переходом в равенстве

$$\begin{aligned} \gamma_2(\Gamma_0, \rho) + \gamma_2(\Gamma_1, \rho) &= \left(\gamma_2(\Gamma_0, \rho) - \frac{1}{2} \right) + (\gamma_2(\Gamma_1, \rho) - \gamma_*) - \\ &- \left(\frac{1}{2} + \gamma_1(\Gamma_0, \rho) \right) - (\gamma_1(\Gamma_1, \rho) - \gamma_*) + \gamma_1(\Gamma_0, \rho) + \gamma_1(\Gamma_1, \rho) + 1 \end{aligned}$$

при $\rho \rightarrow 0$ получить равенство (5.6).

Теорема доказана.

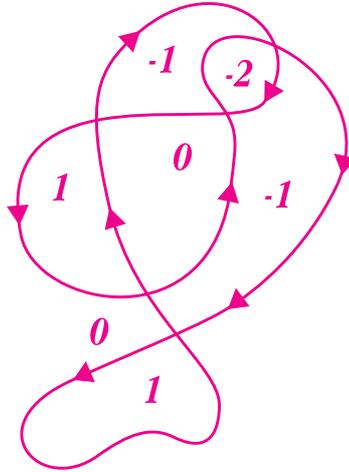


Рис. 5.4

Так как для достаточно удаленных точек порядок, как показано в предыдущем пункте, равен нулю, то теорема 5.4 позволяет вычислять порядки точек. Следовательно, теорема 5.4 позволяет вычислять вращение векторных полей $\Phi(M)$, если удастся построить кривую $\Phi(\Gamma)$. На рис. 5.4 в каждой области, на которую делит плоскость изображенная локально простая кривая $\Phi(\Gamma)$, указан порядок точек относительно $\Phi(\Gamma)$.

Упражнение 5.3.

1) Вычислить порядки точек в областях, на которые плоскость разбивают локально простые кривые, изображенные на рис. 5.2.

2) Как изменятся порядки точек, если ориентацию локально простой кривой заменить противоположной?

Из теоремы 5.4 вытекает, что вращение поля Φ на замкнутой кривой Γ равно 1 или -1 , если из $\Phi(M_1) = \Phi(M_2)$ ($M_1, M_2 \in \Gamma$) следует, что $M_1 = M_2$.

Упражнение 5.4. Пусть векторное поле Φ определено на области Ω с границей Γ , причем вращение поля Φ на Γ отлично от нуля. Докажите, что образ области Ω при преобразовании Φ содержит внутренние точки (эту теорему называют принципом сохранения области).

5.3. Степень отображения на окружность. Пусть даны ориентированные жордановы кривые M_1M_2 и N_1N_2 . Говорят, что степень гомеоморфного (то есть взаимно однозначного и взаимно непрерывного) отображения Φ кривой M_1M_2 на кривую N_1N_2 равна 1, если при этом отображении ориентация сохраняется (то есть, $\Phi(M_1) = N_1, \Phi(M_2) = N_2$). Если ориентация меняется, то степень отображения равна -1 .

Рассмотрим на замкнутой кривой Γ непрерывное нормированное векторное поле Φ . Допустим, что единичную окружность S можно разбить на части $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ точками N_1, \dots, N_n и кривую Γ на части $\Sigma_1, \dots, \Sigma_m$ точками M_1, \dots, M_m (см. рис. 5.5) так, что каждая дуга Σ_i при отображении Φ либо переходит полностью в одну точку N_j , либо гомеоморфно отображается на некоторую из дуг Δ_j ; отображение Φ в этом случае называют *симплициальным*. Выберем одну фиксированную дугу Δ_j и обозначим через s число таких дуг Σ_i которые переходят при отображении Φ в Δ_j и степень отображения которых на Δ_j равна 1, а через t — число дуг Σ_i , степень отображения которых на Δ_j равна -1 . Число

$$\gamma = s - t \tag{5.7}$$

называется *степенью отображения Φ кривой Γ на единичную окружность*.

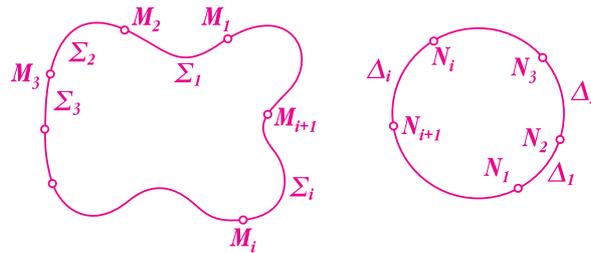


Рис. 5.5

Степень отображения в формуле (5.7) не случайно обозначена той же буквой, которой выше обозначалось вращение. Оказывается, что *степень отображения Φ кривой Γ на единичную окружность равна вращению поля Φ на Γ* . Доказательство этого утверждения предоставляем провести читателю; отметим лишь, что это доказательство в других терминах проведено в п. 1.5.

Так как степень отображения равна вращению поля, то она не зависит от выбора Δ_{j_0} .

Для произвольного непрерывного отображения Φ замкнутой кривой Γ на единичную окружность можно построить сколь угодно близкие симплициальные отображения Φ_ε (докажите). Поля Φ_ε будут гомотопны (в силу близости) полю Φ и поэтому будут иметь одинаковое вращение. Это значит, что достаточно близкие к Φ симплициальные отображения имеют одинаковую степень; эту общую степень называют *степенью отображения Φ кривой Γ на единичную окружность*. При этом определении степень отображения Φ снова совпадает с вращением поля Φ .

Выше описано, как при помощи степени отображения на окружность ввести понятие вращения непрерывного векторного поля из векторов единичной длины. После этого вращение произвольного непрерывного векторного поля Ψ без нулевых векторов определяется как вращение нормированного поля

$$\Phi(M) = \frac{\Psi(M)}{\|\Psi(M)\|} \quad (M \in \Gamma).$$

Приведенное в этом пункте определение степени отображения на окружность или, что то же, понятия вращения непрерывного нормированного векторного поля имеет существенное преимущество: оно просто обобщается⁶ на случай отображений и векторных полей в трехмерном пространстве и в пространствах большего числа измерений.

Упражнение 5.5. Пусть на кривой Γ задано поле Φ без нулевых векторов. Допустим, что удалось найти все положительные решения уравнения $\Phi(M) = t\Phi_0$, где Φ_0 — некоторый фиксированный вектор, причем число этих решений конечно. Как по найденным решениям вычислить вращение поля Φ ?

5.4. Локальная степень отображения. Пусть на области Ω задано непрерывное векторное поле Φ . Допустим, что в некоторой окрестности точки $M_0 \in \Omega$ нет отличных от M_0 точек, в которых вектор поля совпадает с вектором $\Phi(M_0)$. Это значит, что точка M_0 является изолированным нулем векторного поля $\Psi(M) = \Phi(M) - \Phi(M_0)$. Индекс этой особой точки поля назовем *локальной степенью отображения Φ в точке M_0* . Иначе говоря, локальная степень отображения Φ в точке M_0 — это вращение поля $\Psi(M)$ на окружностях S_r , малого радиуса r с центром в точке M_0 , или, что то же, степень отображения — это порядок $q(\Phi(M_0), \Phi; S_r)$ точки $\Phi(M_0)$ относительно $\Phi(S_r)$.

Упражнение 5.6. Докажите, что локальная степень отображения Φ в точке M_0 равна нулю тогда и только тогда, когда столь угодно малым изменением отображения Φ можно получить отображение Ψ , переводящее некоторую фиксированную окрестность точки M_0 в множество, не содержащее $\Phi(M_0)$.

Нам понадобятся в дальнейшем некоторые свойства локальной степени отображения.

Теорема 5.5. Пусть отображение Φ в окрестности точки M_0 взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

⁶См. П.С. Александров, *Комбинаторная топология*, Гостехиздат, 1950; М.А. Красносельский, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*, Гостехиздат, 1956. Авторы предполагают в ближайшее время подготовить книгу, специально посвященную векторным полям в n -мерном пространстве.

Тогда степень отображения Φ в точке M_0 равна 1 или -1 .

Утверждение это непосредственно вытекает из теоремы 5.4, так как в условиях теоремы 5.5 множества $\Phi(S_r)$ будут не только локально простыми кривыми, но, более того, будут замкнутыми жордановыми кривыми.

Теорема 5.6. Пусть в окрестности точки M_0 задано непрерывное векторное поле Φ , а в окрестности точки $N_0 = \Phi(M_0)$ — поле Ψ . Пусть определены локальные степени $\gamma(\Phi, M_0)$ и $\gamma(\Psi, N_0)$ отображения Φ в точке M_0 и отображения Ψ в точке N_0 .

Тогда определена локальная степень $\gamma(X, M_0)$ отображения $X = \Psi(\Phi(M))$ в точке M_0 , причем

$$\gamma(X, M_0) = \gamma(\Psi, N_0) \gamma(\Phi, M_0). \quad (5.8)$$

Это утверждение вытекает из теоремы 4.9; проведение деталей доказательства предоставляем читателю.

Теорема 5.6 будет использована при вычислении индексов особых точек некоторых векторных полей.

5.5. Степень отображения области. Пусть на замкнутой области $\bar{\Omega}$ с границей Γ задано непрерывное векторное поле Φ . Пусть $N_0 \notin \Phi(\Gamma)$. Порядок $\gamma(N_0, \Phi, \Gamma)$ точки N_0 относительно $\Phi(\Gamma)$ называют также *степенью отображения Φ области Ω относительно точки N_0* . Наряду с обозначением $\gamma(N_0, \Phi, \Gamma)$ мы будем писать иногда $\gamma(N_0, \Phi, \Omega)$.

Из определения следует, что все отображения области $\bar{\Omega}$, совпадающие на Γ , имеют одинаковую степень отображения относительно N_0 .

Читатель без труда сформулирует аналоги утверждений, приведенных в п. 5.1, в терминах степени отображения области.

Допустим, что точка N_0 имеет в области Ω конечное число прообразов, то есть лишь конечное число точек M_1, \dots, M_k области Ω при преобразовании Φ переходит в N_0 . Теорема об алгебраическом числе особых точек поля $\Phi(M) - N_0$ может быть сформулирована следующим образом:

Теорема 5.7. Степень $\gamma(N_0, \Phi, \Omega)$ отображения Φ области Ω относительно точки N_0 равна сумме локальных степеней $\gamma(\Phi, M_i)$ отображения Φ во всех прообразах M_i точки N_0 :

$$\gamma(N_0, \Phi; \Omega) = \sum_{i=1}^k \gamma(M_i, \Phi). \quad (5.9)$$

В частности, степень $\gamma(N_0, \Phi, \Omega)$ гомеоморфного отображения Φ области Ω относительно всех точек $N_0 \in \Phi(\Omega)$ равна (в силу теоремы 5.5) 1 или -1 . Принято говорить, что Ω при отображении Φ *положительно накрывает* N_0 , если $\gamma(N_0, \Phi, \Omega) = 1$, аналогично Ω *отрицательно накрывает* N_0 , если $\gamma(N_0, \Phi; \Omega) = -1$.

Если в малой окрестности каждого прообраза M_1, \dots, M_k точки N_0 отображение Φ взаимно однозначно, то теорема 5.7 означает, что степень отображения Φ области Ω относительно точки N_0 равна количеству n_1 прообразов точки N_0 , окрестности которых при отображении Φ положительно накрывают N_0 , минус количество n_2 прообразов, окрестности которых при отображении Φ отрицательно накрывают N_0 :

$$\gamma(N_0, \Phi; \Omega) = n_1 - n_2. \quad (5.10)$$

Формула (5.9) удобна для вычисления степени отображения, а следовательно, и для вычисления вращения векторных полей. Применение этой формулы требует вычисления индексов особых точек векторных полей.

Опишем еще один способ введения понятия степени отображения области, аналогичный описанному в п. 5.3 определению степени отображения на окружность.

Пусть два многоугольника Ω и Δ разбиты некоторым способом на треугольники. Все треугольники считаются ориентированными обычным способом — обход вершин против хода часовой стрелки.

Непрерывное отображение Φ многоугольника Ω на многоугольник Δ называется *симплициальным*, если каждый треугольник Σ разбиения многоугольника Ω при преобразовании Φ либо переходит в одну точку, либо в сторону одного из треугольников Δ разбиения многоугольника Δ , либо Σ аффинно преобразуется в некоторый треугольник Δ . Пусть N_0 — внутренняя точка одного из треугольников Δ_0 разбиения многоугольника Δ . *Степенью симплициального отображения Φ многоугольника Ω относительно точки N_0* называется разность между числом треугольников Σ , переходящих в Δ_0 с сохранением ориентации, и числом треугольников Σ , переходящих в Δ_0 с изменением ориентации. В силу формулы (5.10) это определение совпадает с принятым ранее.

Для случаев произвольных (несимплициальных) отображений Φ произвольной (отличной от многоугольника) области Ω степень отображения определяется как общая степень всех достаточно близких к Φ симплициальных отображений, определенных на многоугольниках, содержащихся в Ω и содержащих все прообразы точки N_0 .

Степень отображения Φ относительно точки N_0 определяется, очевидно, лишь значениями отображения Φ в окрестности полного прообраза точки N_0 . Поэтому понятие степени отображения может быть отнесено и к отображениям, определенным на неограниченных областях (например, на всей плоскости), если только полный прообраз точки N_0 является ограниченным множеством.

Упражнение 5.7. Пусть F — гомеоморфное преобразование плоскости на себя, а ε — степень отображения F .

Доказать, что для любого векторного поля Φ , определенного на $\overline{\Omega}$,

$$\gamma(\Phi(N_0), F\Phi, F(\Omega)) = \varepsilon\gamma(N_0, \Phi, \Omega) \quad (5.11)$$

и

$$\gamma(F^{-1}(N_0), F^{-1}\Phi, F^{-1}(\Omega)) = \varepsilon\gamma(N_0, \Phi, \Omega), \quad (5.12)$$

где через F^{-1} обозначено обратное к F преобразование.

Упражнение 5.8. Пусть F — локально взаимно однозначное отображение. Пусть $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_r$ — все компоненты открытого множества точек, не принадлежащих $\Phi(\Gamma)$, в каждой из которых выбрана фиксированная точка N_i ($i = 1, \dots, r$). Тогда

$$\gamma(P_0, F\Phi, \Omega) = \sum_{i=1}^r \gamma(P_0, F, \mathcal{K}_i) \gamma(N_i, \Phi_i, \Omega) \quad (5.13)$$

(естественно, что точка P_0 предполагается не принадлежащей $F\Phi(\Gamma)$, где Γ — граница Ω).

5.6. Угловой порядок локально простой кривой⁷. Пусть замкнутая локально простая кривая L задана уравнением

$$M(t) = (\phi(t), \psi(t)) \quad (a \leq t \leq b). \quad (5.14)$$

В дальнейшем удобно считать, что $M(t)$ периодически продолжена на все значения t :

$$M(t + b - a) \equiv M(t).$$

Пусть $\alpha(t)$ — такая непрерывная положительная функция, что на каждом отрезке $[t, t + \alpha(t)]$ вектор-функция (5.14) взаимно однозначна (разным значениям аргумента соответствует разное значение функции), причем $\alpha(t) < b - a$. Тогда векторное поле

$$\Phi(t) = M(t + \alpha(t)) - M(t) \quad (a \leq t \leq b) \quad (5.15)$$

не имеет нулевых векторов и непрерывно. Если мы будем рассматривать поля $\Phi(t)$, определенные по различным функциям $\alpha(t)$, то их вращение будет одинаково (докажите!). Это общее вращение назовем *угловым порядком локально простой кривой L* и обозначим через $p(L)$.

Нетрудно видеть, что угловой порядок определяется только направлением обхода локально простой кривой, а не зависит от выбора параметра, определяющего это направление обхода. *При изменении направления обхода угловой порядок меняет знак.*

Если кривая (5.14) гладкая, то ее угловой порядок, очевидно, совпадает с вращением поля касательных. Отсюда и из теоремы 2.3 вытекает, что угловой порядок положительно ориентированной гладкой и замкнутой кривой без самопересечений равен 1. Для этой же кривой, проходимой n раз в положительном направлении, угловой порядок равен n , а при обходе в отрицательном направлении угловой порядок равен $-n$.

Если локально простая кривая L гладкая всюду, за исключением конечного числа угловых точек, то ее угловой порядок $p(L)$ можно определить как сумму вращений поля касательных на гладких частях и измеренных в единицах полного оборота углов поворота касательных в угловых точках. Геометрически очевидно, что углы поворота касательных в угловых точках могут принимать значения от $-\pi$ до π (в радианах).

⁷Понятие углового порядка кривой было подвергнуто систематическому изучению **М. Морсом** в связи с развитием топологических методов теории функций комплексного переменного (**М. Морс**, *Топологические методы в теории функций комплексного переменного*, ИЛ, 1955).

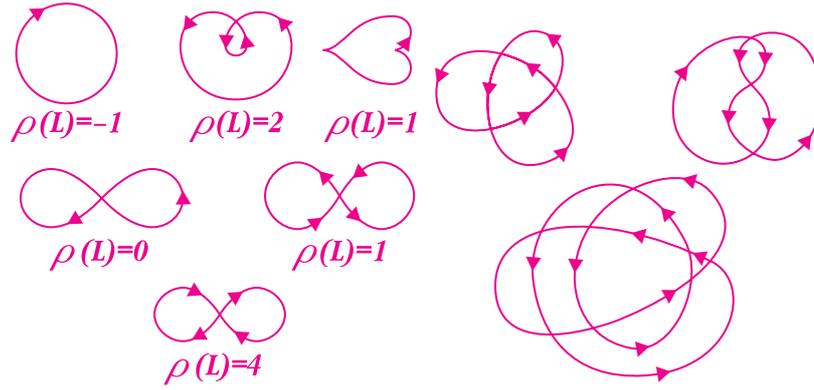


Рис. 5.6

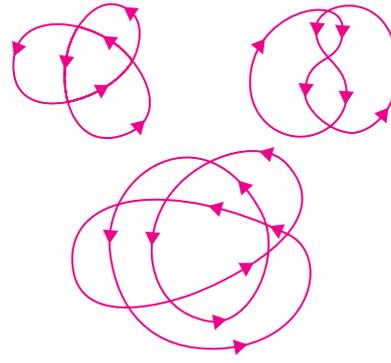


Рис. 5.7

На рис. 5.6 около локально простых кривых указан их угловой порядок. Проверьте, правильно ли он вычислен.

Упражнение 5.9. Вычислить угловой порядок кривых, изображенных на рис. 5.7.

Упражнение 5.10. При каких ориентациях кривой, изображенной на рис. 5.8, ее угловой порядок равен $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$?

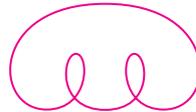


Рис. 5.8

Обозначим через \mathfrak{A} совокупность всех функций $\alpha(t)$, при помощи которых могло конструироваться поле (5.15). Величина

$$\varepsilon(L) = \sup_{\mathfrak{A}} \min_t \alpha(t) \quad (5.16)$$

называется *показателем локальной простоты* L . Эта величина зависит от того, какой введен параметр.

Семейство $L(\lambda)$ ($\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$) локально простых кривых называется *допустимой деформацией*, если эти кривые заданы уравнением

$$M(t, \lambda) = (\phi(t, \lambda), \psi(t, \lambda)) \quad (a \leq t \leq b, \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2), \quad (5.17)$$

где функции $\phi(t, \lambda)$ и $\psi(t, \lambda)$ непрерывны по совокупности переменных, и если показатели $\varepsilon(\lambda)$ локальной простоты кривых $L(\lambda)$ ограничены снизу некоторой положительной постоянной ε_0 .

Локально простые замкнутые кривые, полученные одна из другой при помощи допустимой деформации, имеют одинаковый угловой порядок. Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что в качестве функции $\alpha(t)$ для всех кривых,

определяющих допустимую деформацию, можно взять постоянное число $\frac{1}{2}\varepsilon_0$; после этого становится очевидной непрерывность углового порядка как функции от λ ; остается вспомнить, что угловой порядок — целое число.

Нашей дальнейшей целью будет дать простой рецепт⁸ вычисления углового порядка для случая локально простых гладких кривых L с конечным числом конечнократных точек. Точка локально простой кривой имеет, по определению, конечную кратность, если ей соответствует конечное число значений параметра (на $[a, b]$). Такие точки будем называть *узлами* кривой L .

Кривая L делит плоскость на конечное число m односвязных областей $\Omega_1, \dots, \Omega_{m-1}$ и Ω_∞ , где Ω_∞ — область, содержащая бесконечно удаленную точку. Через q_i будем обозначать порядок (см. пп. 5.1 и 5.2) точек области Ω_i относительно L . Теорема 5.4 позволяет эти порядки вычислять просто. В п. 5.1 было показано, что $q_\infty = 0$.

Так как по предположению кривая L гладкая, то через каждый узел M_0 проходит с определенным направлением конечное число простых дуг. Те дуги, которые касаются друг друга в точке M_0 , будем считать относящимися к одному пучку; пучок может состоять и из одной дуги (см. рис. 5.9). Каждые два пучка пересекают друг друга под отличным от нуля углом.

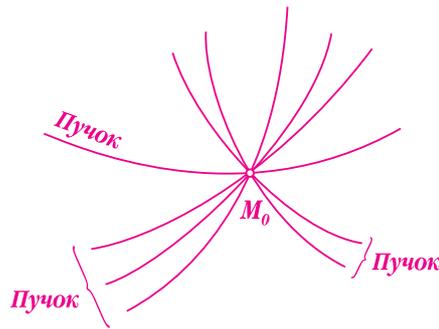


Рис. 5.9

Количество пучков, проходящих через точку M_0 , обозначим через $k(M_0)$. Через узел, изображенный на рис. 5.9, проходит три пучка.

Круговая окрестность точки M_0 достаточно малого радиуса разбивается проходящими через M_0 дугами на конечное число криволинейных секторов. Секторы между дугами одного пучка назовем *секторами первого типа*, у них центральные углы равны нулю. Секторы между пучками назовем *секторами второго типа*, у них центральные углы отличны от нуля.

Каждый сектор, примыкающий к M_0 , принадлежит некоторой области Ω_i . Припишем сектору S *порядок* $q(S)$, равный порядку q_i , если $S \subseteq \Omega_i$.

Пусть $q^{(1)}(M_0)$ — сумма порядков секторов первого типа, а $q^{(2)}(M_0)$ — второго

⁸ **А.И. Поволоцкий**, *Определение углового порядка локально простой кривой*, ДАН СССР 124, №3, 1959.

типа. Тогда величину

$$I(M_0) = \frac{1}{2} \left(q^{(1)}(M_0) + \frac{k-1}{k} q^{(2)}(M_0) \right) \quad (5.18)$$

назовем *индексом узла* M_0 . Ниже будет доказано, что *индекс каждого узла есть целое число*.

Вычислим, например, индекс узла, изображенного на рис. 5.10 (цифры указывают порядки $q(S)$ соответствующих секторов). Здесь $k = 2$, $q^{(1)} = 8$, $q^{(2)} = 4$, поэтому

$$I(M_0) = \frac{1}{2} \left(8 + \frac{2-1}{2} \cdot 4 \right) = 5.$$

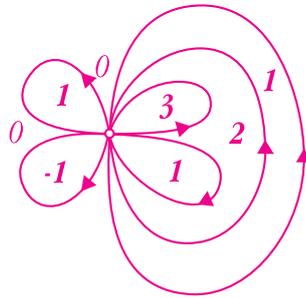


Рис. 5.10

Пусть M_1, \dots, M_n — все узлы гладкой локально простой кривой L .

Теорема 5.8. *Угловой порядок $p(L)$ можно определить формулой*

$$p(L) = \sum_{i=1}^m q_i - \sum_{i=1}^n I(M_i). \quad (5.19)$$

Доказательство. Рассмотрим границу Γ_i области Ω_i , порядок которой $q_i = q(\Omega_i)$ отличен от нуля. Каждая такая область односвязна, и поэтому Γ_i можно рассматривать как некоторую локально простую кривую, угловой порядок которой (при положительной ориентации) равен 1. Этот угловой порядок равен сумме поворотов касательных на гладких дугах, из которых составлена граница Γ_i , плюс сумма углов между касательными в угловых точках границы Γ_i (эти угловые точки — узлы кривой, к которым примыкает область Ω_i).

Положительная ориентация кривой Γ_i совпадает, в силу теоремы 4.4, с направлением обхода всей кривой L на тех дугах границы, которые отделяют Ω_i от областей Ω_j , порядок которых меньше на 1. На остальных дугах кривой Γ_i , отделяющих Ω_i от областей с большим на 1 порядком, эта положительная ориентация противоположна направлению обхода L . Отсюда вытекает, что при обходе каждой кривой Γ_i ровно q_i раз (q_i раз в положительном направлении, если $q_i > 0$, и $|q_i|$ раз в отрицательном направлении, если $q_i < 0$) каждая дуга, разделяющая две

области, будет пройдена в направлении обхода кривой L на один раз больше, чем в противоположном направлении.

Это значит, что при описанной системе обходов сумма всех поворотов касательных на гладких дугах границ Γ_i будет равна $2\pi p(L)$, где $p(L)$ — угловой порядок кривой L . Если к поворотам касательных прибавить углы между касательными в угловых точках границ Γ_i , то мы получим, как отмечалось в начале доказательства, угловые порядки кривых Γ_i . Таким образом, мы приходим к равенству

$$\sum_{i=1}^n q(\Omega_i) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^m r(M_i) + p(L), \quad (5.20)$$

где $r(M_i)$ — это сумма поворотов касательной во всех углах с вершиной в узле M_i , причем в этой сумме каждый поворот касательной берется столько раз, каков порядок соответствующего углового сектора.

Мы покажем, что

$$\frac{1}{2\pi} r(M_i) = I(M_i) \quad (i = 1, \dots, m).$$

Этим доказательство теоремы будет завершено.

При допустимой деформации локально простой кривой ее порядок не меняется. Произведем такую деформацию кривой L , чтобы она изменилась лишь в окрестности фиксированного узла M_0 таким образом, что число и взаимное расположение областей Ω_i не меняется, но пучки (количество которых равно k) расположены таким образом, что угол между ними равен $\frac{\pi}{k}$. Возможность описанной деформации геометрически очевидна (на строгом доказательстве, которое несложно, но громоздко, мы не останавливаемся).

Так как при рассматриваемой деформации все величины, входящие в равенство (5.20), не меняются, то не меняется и величина $r(M_0)$. Но для деформированного узла эта величина просто вычисляется. Если S — сектор первого типа в вершине M_0 , то поворот касательной в точке M_0 равен π , а если S — сектор второго типа, то поворот касательных равен $\pi - \frac{\pi}{k}$. Поэтому

$$r(M_0) = \pi q^{(1)}(M_0) + \left(\pi - \frac{\pi}{k}\right) q^{(2)}(M_0) = 2\pi I(M_0).$$

Теорема доказана.

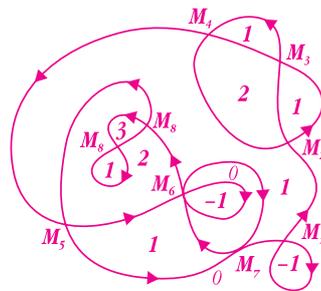


Рис. 5.11

В качестве примера рассмотрим изображенную на рис. 5.11 кривую. В каждой области указан ее порядок. Имеем

$$\sum_{i=1}^{12} q_i = 10.$$

Индексы узлов равны

$$I(M_1) = 0, \quad I(M_2) = I(M_3) = \dots = I(M_7) = 1, \quad I(M_8) = I(M_9) = 2,$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^9 I(M_i) = 10.$$

Следовательно, угловой порядок этой кривой

$$p = 10 - 10 = 0.$$

Покажем, что индекс каждого узла — целое число, и выведем новую формулу для его вычисления.

Аналогично тому, как мы производили допустимую деформацию при доказательстве теоремы 5.8, произведем новую деформацию, при которой все дуги, проходящие через узел M_0 , перейдут в один пучок. Такая деформация не изменит $r(M_0)$ узла, а следовательно, не изменит и индекс узла. После деформации секторов второго типа будет ровно два, а остальные секторы будут секторами первого типа. Поэтому

$$I(M_0) = \frac{1}{2} q_*, \tag{5.21}$$

где q_* — сумма порядков секторов первого типа.

Порядки соседних секторов в силу теоремы 5.4 являются числами разной четности. Поэтому сумма порядков диаметрально противоположных секторов является четным числом, если количество пар секторов четно, и эта сумма является нечетным числом, если количество пар секторов нечетно. В обоих этих случаях число q_* , как легко видеть, четно. Поэтому индекс $I(M_0)$ — целое число.

Число q_* отличается от суммы q порядков *всех* секторов, примыкающих к узлу M_0 , на сумму порядков двух диаметрально противоположных секторов второго типа. Отсюда вытекает, что сумма порядков двух диаметрально противоположных секторов второго типа есть величина постоянная.

Заметим, что сумма порядков двух диаметрально противоположных секторов первого типа может отличаться от суммы порядков диаметрально противоположных секторов второго типа (постройте пример).

5.7. О вращении разрывных полей. Понятие вращения может быть обобщено на некоторые классы разрывных полей. Опираясь на такое обобщение, **И.Б. Симоненко** (ДАН **135** (1960), №3) получил важные результаты по краевым задачам для аналитических функций. О приложениях вращения к этим вопросам см. например, **Ф.Д. Гахов**, *Краевые задачи* (Физматгиз, 1963).

ГЛАВА 2

ИНДЕКС ОСОБОЙ ТОЧКИ

§ 6. Векторные поля с главной линейной частью

6.1. Вычисление индекса по главной части поля. Пусть M_0 — особая точка непрерывного векторного поля Φ . Напомним, что к особым точкам относятся точки, в которых поле не определено, в которых нарушается непрерывность поля, и точки, в которых векторы поля равны нулю. Нас в этой главе будет интересовать вопрос о том, изолирована ли особая точка M_0 и, если она изолирована, чему равен ее индекс.

Всюду в дальнейшем мы будем считать, что в плоскости задана прямоугольная система координат (x, y) . Тогда векторное поле Φ задается своими компонентами

$$\Phi(x, y) = (\phi(x, y), \psi(x, y)). \quad (6.1)$$

Легко видеть, что особая точка (x_0, y_0) поля (6.1) изолирована в том и только в том случае, если изолирована особая точка $(0, 0)$ поля

$$\Psi(x, y) = (\phi(x + x_0, y + y_0), \psi(x + x_0, y + y_0)), \quad (6.2)$$

причем индексы этих особых точек одинаковы. Поэтому без ограничения общности можно считать, что изучаемая особая точка — это нулевая точка $O(0, 0)$.

Поле Φ_0 называется *главной частью поля Φ в окрестности точки O* , если в отличных от O точках некоторой окрестности O выполняется неравенство

$$\|\Phi_0(M) - \Phi(M)\| < \|\Phi_0(M)\|. \quad (6.3)$$

Если нулевая точка является изолированной особой точкой поля Φ_0 , то она будет изолированной особой точкой поля Φ . В силу теоремы 4.6 (теоремы Руше) индексы нулевой особой точки полей Φ и Φ_0 одинаковы.

Основной принцип для вычисления индекса особой точки поля Φ заключается в отыскании такой главной части Φ_0 , чтобы индекс нулевой особой точки поля Φ_0 вычислялся просто.

В ближайших параграфах мы будем искать индексы особых точек, являющихся нулями непрерывного векторного поля. Иначе говоря, будем изучать такие точки (x_0, y_0) , в которых поле непрерывно и координаты которых определяются из системы уравнений

$$\phi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0. \quad (6.4)$$

Будем считать для простоты, что $x_0 = y_0 = 0$.

Предположим дополнительно, что компоненты $\phi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ поля (6.1) — достаточно гладкие функции. Тогда напрашивается следующий способ выделения главной части поля.

Пользуясь формулой Тейлора, представим⁹ компоненты поля Φ в виде

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & a_1^0 x + a_0^1 y + (a_2^0 x^2 + 2a_1^1 xy + a_0^2 y^2) + \dots + \\ & + (a_n^0 x^n + na_{n-1}^1 x^{n-1} y + \dots + a_0^n y^n) + \omega_1(x, y), \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = & b_1^0 x + b_0^1 y + (b_2^0 x^2 + 2b_1^1 xy + b_0^2 y^2) + \dots + \\ & + (b_n^0 x^n + nb_{n-1}^1 x^{n-1} y + \dots + b_0^n y^n) + \omega_2(x, y), \end{aligned} \quad (6.6)$$

где

$$(k+s)!a_k^s = \frac{\partial^k \phi(0,0)}{\partial x^k \partial y^s}, \quad (k+s)!b_k^s = \frac{\partial^k \psi(0,0)}{\partial x^k \partial y^s}, \quad (6.6)$$

а остатки $\omega_1(x, y)$ и $\omega_2(x, y)$ являются бесконечно малыми высшего, чем n , порядка относительно n -й степени величины $r = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\omega_1(x, y) = o(r^n), \quad \omega_2(x, y) = o(r^n), \quad (6.7)$$

то есть

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0} \frac{\omega_1(x, y)}{(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}} = \lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0} \frac{\omega_2(x, y)}{(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}} = 0. \quad (6.8)$$

Число n в представлениях (6.5) может быть любым.

Через Φ_0 обозначим поле с компонентами

$$\begin{aligned} \phi_0(x, y) = & a_1^0 x + a_0^1 y + (a_2^0 x^2 + 2a_1^1 xy + a_0^2 y^2) + \dots + \\ & + (a_n^0 x^n + na_{n-1}^1 x^{n-1} y + \dots + a_0^n y^n), \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \psi_0(x, y) = & b_1^0 x + b_0^1 y + (b_2^0 x^2 + 2b_1^1 xy + b_0^2 y^2) + \dots + \\ & + (b_n^0 x^n + nb_{n-1}^1 x^{n-1} y + \dots + b_0^n y^n) \end{aligned}$$

и допустим, что нулевая точка является изолированной особой точкой поля Φ_0 . Естественно ожидать, что поле Φ_0 будет главной частью поля Φ , и поэтому при исследовании нулевой особой точки поля Φ можно перейти к более простому полю Φ_0 . В общем случае это неверно.

Рассмотрим, например, векторные поля

$$\Phi(x, y) = (x - y^2 + y^3, x^2) \quad (6.10)$$

и

$$\Phi_0(x, y) = (x - y^2, x^2). \quad (6.11)$$

⁹Г.М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 1 (1959), стр. 471.

На точках M кривой $x = y^2$ (при $|y| < 1$) выполнено противоположное (6.3) неравенство

$$\|\Phi_0(M) - \Phi(M)\| = |y^3| > y^4 = x^2 = \|\Phi_0(M)\|.$$

Этот пример не означает, что переход от поля (6.5) к полю (6.9) никогда не возможен. Нужно лишь помнить, что при таком переходе должно быть проверено условие (6.3). Это условие (в силу (6.8)) заведомо выполнено, если при малых $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\|\Phi_0(x, y)\| \geq \alpha_0 r^n, \quad (6.12)$$

где α_0 — некоторое положительное число.

Упражнение 6.1. Проверить, будет ли поле Φ_0 главной частью поля Φ в окрестности нуля в следующих случаях:

- 1) $\Phi(x, y) = (x - y^2, x^2 + x^3 - 2x^2y^2 + 3xy^4 - y^6)$, $\Phi_0(x, y) = (x - y^2, x^2)$;
- 2) $\Phi(x, y) = (x - y^2 + y^3, x^2)$, $\Phi_0(x, y) = (x, 0)$;
- 3) $\Phi(x, y) = (x - y^2 + y^{10}, x^2)$, $\Phi_0(x, y) = (x - y^2, x^2)$.

6.2. Линейные поля. Рассмотрим линейное поле

$$\Phi_0(x, y) = (a_1x + a_2y, b_1x + b_2y). \quad (6.13)$$

Нулевая точка будет изолированной особой точкой поля (6.13), если прямые $a_1x + a_2y = 0$ и $b_1x + b_2y = 0$ не совпадают. Иначе говоря, нулевая точка является изолированной особой точкой поля (6.13), если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0. \quad (6.14)$$

В этом случае линейное поле (6.13) будем называть *невырожденным*.

Теорема 6.1. Индекс γ нулевой особой точки поля (6.13) определяется равенством

$$\gamma = \text{sign } \Delta. \quad (6.15)$$

Доказательство. Индекс γ равен (по определению) вращению поля (6.13) на единичной окружности

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \quad (6.16)$$

Найдем производную угловой функции $\theta(t)$ поля (6.13) на окружности (6.16). Очевидно,

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \arctg \frac{b_1x + b_2y}{a_1x + a_2y} = \\ &= \frac{(-b_1 \sin t + b_2 \cos t)(a_1 \cos t + a_2 \sin t)}{(a_1 \cos t + a_2 \sin t)^2 + (b_1 \cos t + b_2 \sin t)^2} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{(-a_1 \sin t + a_2 \cos t)(b_1 \cos t + b_2 \sin t)}{(a_1 \cos t + a_2 \sin t)^2 + (b_1 \cos t + b_2 \sin t)^2} = \\ & = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{(a_1 \cos t + a_2 \sin t)^2 + (b_1 \cos t + b_2 \sin t)^2} = \frac{\Delta}{(a_1 \cos t + a_2 \sin t)^2 + (b_1 \cos t + b_2 \sin t)^2}. \end{aligned}$$

Значит, угловая функция возрастает, если $\Delta > 0$, и убывает, если $\Delta < 0$. Таким образом, знак вращения γ совпадает со знаком Δ . По абсолютной величине γ равно 1, так как линейное преобразование Φ_0 является гомеоморфным преобразованием.

Теорема доказана.

Упражнение 6.2.

1) Вычислить индекс нулевой особой точки следующих векторных полей: (x, y) , $(-x, y)$, $(-x, -y)$, $(3x - 2y, 2x - 4y)$, $(2x - y, -4x + 2y)$.

2) Доказать, что вращение линейного векторного поля на замкнутой жордановой кривой Γ равно $\text{sign } \Delta$, если нулевая точка лежит внутри Γ , и равно нулю, если нулевая точка лежит вне Γ .

3) Вычислить вращение поля $(2x - 3y + 10, -x + 4y - 5)$ на квадрате $|x| + |y| = 1000$.

Теоремой 6.1 мы будем часто пользоваться в эквивалентной форме: *степень линейного отображения (6.13) равна $\text{sign } \Delta$.*

6.3. Вычисление индекса по линеаризованному полю. Вернемся к изучению нелинейного поля

$$\Phi(x, y) = (\phi(x, y), \psi(x, y)), \quad (6.17)$$

компоненты которого $\phi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ в нулевой точке дифференцируемы, причем

$$\phi(0, 0) = \psi(0, 0) = 0. \quad (6.18)$$

Введем обозначения

$$a_1 = \phi'_x(0, 0), \quad a_2 = \phi'_y(0, 0), \quad b_1 = \psi'_x(0, 0), \quad b_2 = \psi'_y(0, 0)$$

и предположим, что линейное поле

$$\Phi_0(x, y) = (a_1 x + a_2 y, b_1 x + b_2 y)$$

невырождено.

Обозначим через α_0 наименьшую длину векторов $\Phi_0(x, y)$ на единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$. Тогда в любой точке (x, y) будет выполнено неравенство

$$\|\Phi_0(x, y)\| = \sqrt{(a_1 x + a_2 y)^2 + (b_1 x + b_2 y)^2} \geq \alpha_0 \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (6.19)$$

Дифференцируемость функций $\phi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ в нулевой точке означает, что

$$\phi(x, y) - a_1 x - a_2 y = o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad \psi(x, y) - b_1 x - b_2 y = o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

откуда следует, что

$$\|\Phi(x, y) - \Phi_0(x, y)\| = o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Из этого соотношения и из неравенства (6.19) вытекает, что поле Φ_0 является главной частью поля Φ в окрестности нулевой точки. Таким образом, нами доказана (см. п. 6.1)

Теорема 6.2. *Если*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \phi'_x(0, 0) & \phi'_y(0, 0) \\ \psi'_x(0, 0) & \psi'_y(0, 0) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (6.20)$$

то нулевая особая точка поля (6.17) изолирована и ее индекс γ определяется равенством

$$\gamma = \text{sign} \begin{vmatrix} \phi'_x(0, 0) & \phi'_y(0, 0) \\ \psi'_x(0, 0) & \psi'_y(0, 0) \end{vmatrix}. \quad (6.21)$$

Задача вычисления индекса становится более сложной, если определитель Δ равен нулю. Если при этом по крайней мере один элемент определителя Δ отличен от нуля, то для вычисления индекса может быть указан конечный алгоритм (см. § 7), обладающий достаточной общностью. Для случая же, когда

$$\phi'_x(0, 0) = \phi'_y(0, 0) = \psi'_x(0, 0) = \psi'_y(0, 0) = 0,$$

простой общий алгоритм вычисления индекса неизвестен, и поле относительно просто исследуется лишь в предположении, что его главная часть обладает свойством однородности некоторого порядка (см. § 8).

Из теоремы 6.2 вытекает рецепт вычисления индекса ненулевой особой точки (x_0, y_0) . Для удобства сформулируем этот рецепт в виде отдельной теоремы.

Теорема 6.3. *Пусть*

$$\phi(x_0, y_0) = \psi(x_0, y_0) = 0 \quad (6.22)$$

и пусть в точке (x_0, y_0) функции $\phi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ дифференцируемы.

Если

$$\Delta = \begin{vmatrix} \phi'_x(x_0, y_0) & \phi'_y(x_0, y_0) \\ \psi'_x(x_0, y_0) & \psi'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (6.23)$$

то особая точка (x_0, y_0) поля Φ изолирована. Индекс γ этой особой точки определяется равенством

$$\gamma = \text{sign} \begin{vmatrix} \phi'_x(x_0, y_0) & \phi'_y(x_0, y_0) \\ \psi'_x(x_0, y_0) & \psi'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}. \quad (6.24)$$

Упражнение 6.3. *Вычислить, пользуясь теоремой 6.2, если она применима, индекс нулевой особой точки векторных полей:*

- 1) $\Phi(x, y) = (\sin(x + y), \sin(x - y))$,
- 2) $\Phi(x, y) = (1 - \cos(2x - y), y)$,
- 3) $\Phi(x, y) = (x + 17x^2 - y^3, 2y - 9x^3)$.

Упражнение 6.4. Пользуясь теоремой об алгебраическом числе особых точек и теоремой 6.2, вычислить вращение на окружности $x^2 + (y + 1)^2 = 4$ поля

$$\Phi(x, y) = (1 + x - 2y + y^2, x^2 - (1 - y^2)^4 + y(y - 2)(2y - 1)).$$

6.4. Асимптотически линейные поля. Поле

$$\Phi(x, y) = (\phi(x, y), \psi(x, y)), \quad (6.25)$$

определенное для всех достаточно далеких точек плоскости, называется *асимптотически линейным*, если найдутся такие a_1, a_2, b_1, b_2 , что

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \frac{\phi(x, y) - a_1x - a_2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \frac{\psi(x, y) - b_1x - b_2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0. \quad (6.26)$$

Аналогом теоремы 6.2 для асимптотически линейных полей является

Теорема 6.4. Вращение γ асимптотически линейного поля на окружностях $x^2 + y^2 = R^2$ достаточно большого радиуса R определяется равенством

$$\gamma = \text{sign } \Delta, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad (6.27)$$

если $\Delta \neq 0$.

§ 7. Векторные поля с вырожденной линейной частью

7.1. Общая формула. Продолжим изучение векторного

$$\Phi(x, y) = (\phi(x, y), \psi(x, y)). \quad (7.1)$$

Будем считать, что нулевая точка $O(0, 0)$ — это особая точка поля (7.1): $\phi(0, 0) = \psi(0, 0) = 0$. Как и в предыдущем параграфе, будем пользоваться обозначениями

$$a_1 = \phi'_x(0, 0), \quad a_2 = \phi'_y(0, 0), \quad b_1 = \psi'_x(0, 0), \quad b_2 = \psi'_y(0, 0). \quad (7.2)$$

В этом параграфе будет рассмотрен тот случай, когда определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad (7.3)$$

равен нулю, но по крайней мере одно из чисел (7.2) отлично от нуля. Для удобства мы будем считать, что

$$a_1 = \phi'_x(0, 0) \neq 0; \quad (7.4)$$

остальные случаи рассматриваются аналогично.

Если функция $\phi(x, y)$ в окрестности нуля непрерывно дифференцируема, то из условия (7.4) (и из теоремы о неявной функции) вытекает, что уравнение

$$\phi(x, y) = 0 \quad (7.5)$$

определяет в окрестности нулевой точки единственную неявную функцию $x = \xi(y)$. Это значит, что

$$\xi(0) = 0, \quad \phi(\xi(y), y) \equiv 0.$$

Функция $\xi(y)$ в окрестности нуля непрерывно дифференцируема; ее производная определяется равенством

$$\xi'(y) = -\frac{\phi'_y(\xi(y), y)}{\phi'_x(\xi(y), y)}, \quad (7.6)$$

откуда следует, что производная $\xi'(y)$ в окрестности нуля непрерывна. Поэтому график функции $x = \xi(y)$ пересекет окружности $x^2 + y^2 = \rho^2$ малого радиуса ρ только в двух точках (см. рис. 7.1), одна из которых имеет положительную, а вторая — отрицательную ординаты. Обозначим эти точки через $M_1(\rho)$ и $M_2(\rho)$.

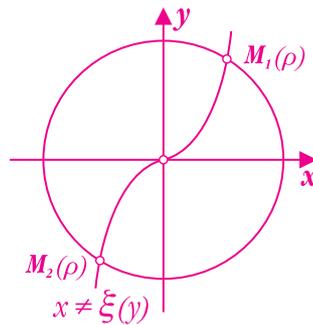


Рис. 7.1

Для того чтобы нулевая особая точка была изолирована, необходимо и достаточно, чтобы при достаточно малых ρ в точках $M_1(\rho)$ и $M_2(\rho)$ была отлична от нуля вторая компонента поля (7.1). Иначе говоря, нулевая точка является изолированной особой точкой в том и только том случае, если при малых ненулевых y функция

$$\alpha(y) = \psi(\xi(y), y) \quad (7.7)$$

принимает ненулевые значения.

Допустим, что функция $\alpha(y)$ при ненулевых малых y принимает ненулевые значения. Обозначим через ε_- знак значений функции $\alpha(y)$ при малых отрицательных y , а через ε_+ — при малых положительных y .

Пусть $\varepsilon_- = \varepsilon_+$. Тогда векторное поле (7.1) на окружностях $x^2 + y^2 = \rho^2$ малого радиуса ρ выпускает либо положительное направление оси ординат, либо противоположное направление. Следовательно, вращение поля $\Phi(x, y)$ на указанных окружностях равно нулю; значит, индекс нулевой особой точки равен нулю.

Пусть теперь $\varepsilon_- = -\varepsilon_+$. Для вычисления вращения поля Φ на окружностях $x^2 + y^2 = \rho^2$ малого радиуса воспользуемся формулой (2.7). Из условия (7.4) вытекает, что функция $\phi(x, y)$ при переходе через график функции $\xi(y)$ (см. рис. 7.1) меняет знак. Будем считать, что на окружности $x^2 + y^2 = \rho^2$ введен параметр t :

$$x = \rho \cos t, \quad y = \rho \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi), \quad (7.8)$$

и положим

$$P(t) = \phi(\rho \cos t, \rho \sin t), \quad Q(t) = \psi(\rho \cos t, \rho \sin t).$$

По предположению функция $Q(t)$ принимает положительное значение только при одном значении t^* параметра t из двух значений, соответствующих точкам $M_1(\rho)$ и $M_2(\rho)$. Из формулы (2.7) вытекает, что вращение поля Φ на окружности (7.8) равно 1 или -1 .

Допустим, что $\varepsilon_- = -1$, $\varepsilon_+ = 1$, $\phi'(0, 0) > 0$. Тогда при переходе через точку t^* функция $P(t)$ убывает. Поэтому индекс особой точки равен 1. Аналогично рассматриваются и другие случаи. Все эти случаи (включая случай нулевого индекса) можно охватить общей формулой

$$\gamma = \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{2} \operatorname{sign} \phi'_x(0, 0). \quad (7.9)$$

Упражнение 7.1.

1) Написать аналоги формулы (7.9) для случаев, когда отлично от нуля одно из чисел a_2, b_1, b_2 .

2) Проведенные в этом пункте рассуждения не используют равенства нулю определителя (7.3). Покажите, что в случае $\Delta \neq 0$ из формулы (7.9) вытекает теорема 6.2.

Упражнение 7.2. Вычислить индекс нулевой особой точки следующих векторных полей:

- 1) $\Phi(x, y) = (y, ax^n)$,
- 2) $\Phi(x, y) = (x + y^2, \sin(x^2 + xy - y^3 + 4xy^2))$,
- 3) $\Phi(x, y) = \left(x + y, e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right)$.

Из формулы (7.9) вытекает

Теорема 7.1. Пусть (x_0, y_0) — изолированная особая точка непрерывно дифференцируемого векторного поля (7.1), и пусть одно из чисел

$$\phi'_x(x_0, y_0), \quad \phi'_y(x_0, y_0), \quad \psi'_x(x_0, y_0), \quad \psi'_y(x_0, y_0)$$

отлично от нуля.

Тогда индекс особой точки равен одному из трех чисел $-1, 0, 1$.

7.2. Вычисление индекса¹⁰. Чтобы применить формулу (7.9), нужно, во-первых, убедиться в отличии от нуля значений функции (7.7) при малых ненулевых x и y , во-вторых, найти знаки этих значений. На оба эти вопроса, вообще говоря,

¹⁰Близкие соображения по другому поводу приводились еще **А.М. Ляпуновым** (см. также **С. Лефшец**, *Геометрическая теория дифференциальных уравнений*, ИЛ, Москва, 1961).

легко ответить, если функции $\phi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ обладают достаточным числом производных; сделаем это предположение.

Из дифференцируемости функций $\phi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ вытекает дифференцируемость функции $\alpha(y)$. Для отыскания $\alpha'(y)$ достаточно продифференцировать тождества

$$\phi(\xi(y), y) = 0, \quad \alpha(y) = \psi(\xi(y), y),$$

то есть определить $\alpha'(y)$ из уравнений

$$\phi'_x(\xi(y), y)\xi'(y) + \phi'_y(\xi(y), y) = 0,$$

$$\alpha'(y) = \phi'_x(\xi(y), y)\xi'(y) + \phi'_y(\xi(y), y).$$

Для определения $\alpha''(y)$ последние равенства нужно продифференцировать еще раз:

$$\phi_x(\xi(y), y)\xi''(y) + \phi''_{x^2}(\xi(y), y)\xi'^2(y) + 2\phi''_{xy}(\xi(y), y)\xi'(y) + \phi''_{y^2}(\xi(y), y) = 0,$$

$$\alpha''(y) = \psi_x(\xi(y), y)\xi''(y) + \psi''_{x^2}(\xi(y), y)\xi'^2(y) + 2\psi''_{xy}(\xi(y), y)\xi'(y) + \psi''_{y^2}(\xi(y), y).$$

Аналогично вычисляются следующие производные.

Нам понадобятся значения производных функции $\alpha(y)$ в точке $y = 0$. Допустим, что

$$\alpha'(0) = \alpha''(0) = \dots = \alpha^{(k-1)}(0) = 0, \quad \alpha^{(k)}(0) \neq 0 \quad (7.10)$$

(если определитель (7.3) равен нулю, то всегда $k > 1$). Тогда из формулы Тейлора вытекает, что

$$\alpha(y) = \frac{\alpha^{(k)}(0)}{k!}y^k + o(y^k). \quad (7.11)$$

Поэтому

$$\varepsilon_- = (-1)^k \text{sign } \alpha^{(k)}(0), \quad \varepsilon_+ = \text{sign } \alpha^{(k)}(0). \quad (7.12)$$

Из формул (7.9) и (7.12) вытекает

Теорема 7.2. Пусть (x_0, y_0) — особая точка векторного поля (7.1) и $\phi'_x(x_0, y_0) \neq 0$. Пусть выполнено условие (7.10).

Тогда (x_0, y_0) является изолированной особой точкой и ее индекс γ определяется равенством

$$\gamma = \frac{1 - (-1)^k}{2} \text{sign } \phi'_x(x_0, y_0) \text{sign } \alpha^{(k)}(0). \quad (7.13)$$

Упражнение 7.3. Допустим, что все производные $\alpha^{(i)} = 0$ равны нулю. Вытекает ли отсюда, что нулевая особая точка поля (7.1) не изолирована? Отдельно рассмотреть случай, когда функции $\phi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ аналитичны в окрестности нуля (то есть представимы степенными рядами).

Упражнение 7.4. Вычислить индекс нулевой особой точки следующих векторных полей:

$$1) \Phi(x, y) = (x, a_0^k x^k + a_1^{k-1} x^{k-1} y + \dots + a_k^0 y^k),$$

- 2) $\Phi(x, y) = \left(e^{x+y^2} - 1, x^2 - x^3 + xy^2 + x \sin y + \sin y^2 \right),$
 3) $\Phi(x, y) = \left(x^2 - 2xy + y^3 + y^4 \sin \frac{1}{y} - x^4 \sin \frac{1}{y}, x - \frac{y^2}{1-x^2} \right),$
 4) $\Phi(x, y) = \left(x + \frac{y}{1-x}, \sin \left(x^2 + y^2 + (2y + y^2) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n \right) \right).$

7.3. Еще один способ вычисления индекса. Последовательное определение производных функции $\alpha(y)$ требует громоздких вычислений. В некоторых случаях удобно применять другие приемы.

Рассмотрим вначале векторное поле

$$\Phi(x, y) = (\phi(x, y), \psi(x, y)),$$

в котором компоненты имеют специальный вид:

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= x + a_2(x, y) + \dots + a_m(x, y) + \omega_1(x, y), \\ \psi(x, y) &= b_1(x, y) + b_2(x, y) + \dots + b_n(x, y) + \omega_2(x, y); \end{aligned} \quad (7.14)$$

здесь через $a_i(x, y)$, $b_i(x, y)$ обозначены однородные степени i многочленов относительно x и y , а

$$\omega_1(x, y) = o\left((x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}\right), \quad \omega_2(x, y) = o\left((x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}\right). \quad (7.15)$$

Лемма 7.1. Пусть

$$b_1(x, y) \equiv \dots \equiv b_{k-1}(x, y) \equiv 0, \quad b_k(0, 1) \neq 0. \quad (7.16)$$

Тогда нулевая особая точка поля (7.14) изолирована и ее индекс γ определяется равенством

$$\gamma = \frac{1 - (-1)^k}{2} \operatorname{sign} b_k(0, 1). \quad (7.17)$$

Доказательство. Рассмотрим поле

$$\Psi(x, y) = (x, b_k(0, 1)y^k). \quad (7.18)$$

Нулевая особая точка этого поля изолирована, и ее индекс в силу теоремы 7.2 вычисляется по формуле (7.17). Поэтому достаточно показать, что на окружностях $x^2 + y^2 = \rho^2$ малого радиуса ρ поля (7.14) и (7.18) гомотопны.

Так как многочлен $b_k(x, y) - b_k(0, 1)y^k$ делится на x , то можно указать такое число $\varepsilon_0 > 0$, что при $|x| \leq \varepsilon_0|y|$ будет выполнено неравенство

$$|b_k(x, y) - b_k(0, 1)y^k| \leq \frac{|b_k(0, 1)|}{4} |y|^k. \quad (7.19)$$

Так как

$$|\phi(x, y) - x| = o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

$$|\psi(x, y) - b_k(x, y)| = o\left((x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}}\right),$$

то при $|x| \geq \varepsilon_0|y|$

$$|\phi(x, y) - x| = o(|x|),$$

а при $|x| \leq \varepsilon_0|y|$

$$|\psi(x, y) - b_k(x, y)| = o(y^k).$$

Выберем число ρ_0 так, чтобы выполнялись неравенства

$$|\phi(x, y) - x| \leq \frac{|x|}{2} \quad (|x| \geq \varepsilon_0|y|, x^2 + y^2 \leq \rho_0^2)$$

и

$$|\psi(x, y) - b_k(x, y)| \leq \frac{|b_k(0, 1)|}{4} |y|^k \quad (|x| \leq \varepsilon_0|y|, x^2 + y^2 \leq \rho_0^2).$$

Тогда, очевидно, на окружностях $x^2 + y^2 = \rho^2$ ($\rho \leq \rho_0$) поле $\Phi(x, y)$ не обращается в нуль, так как при $|x| \geq \varepsilon_0|y|$

$$|\phi(x, y)| \geq |x| - |\phi(x, y) - x| \geq \frac{|x|}{2} > 0,$$

а при $|x| \leq \varepsilon_0|y|$

$$\begin{aligned} |\psi(x, y)| &\geq |b_k(0, 1)y^k| - |b_k(x, y) - b_k(0, 1)y^k| - \\ &\quad - |\psi(x, y) - b_k(x, y)| \geq \frac{|b_k(0, 1)|}{2} |y|^k > 0. \end{aligned}$$

Поэтому нулевая особая точка поля $\Phi(x, y)$ будет изолированной и ее индекс будет равен вращению поля $\Phi(x, y)$ на окружностях $x^2 + y^2 = \rho^2$ ($\rho \leq \rho_0$). Но на этих окружностях векторы полей (7.14) и (7.18) не направлены противоположно: при $|x| \geq \varepsilon_0|y|$ одинаковый знак имеют первые компоненты, а при $|x| \leq \varepsilon_0|y|$ — вторые. Поэтому поля (7.14) и (7.18) гомотопны на окружностях $x^2 + y^2 = \rho^2$ ($\rho \leq \rho_0^2$).

Лемма доказана.

Заметим, что для дифференцируемых $\omega_1(x, y)$ и $\omega_2(x, y)$ утверждение леммы 7.1 вытекает из теоремы 7.2.

Лемма 7.2. *Нулевая особая точка векторного поля*

$$\Phi(x, y) = (\phi(x, y), \psi(x, y)) \tag{7.20}$$

изолирована тогда и только тогда, когда изолирована нулевая особая точка поля

$$\Phi_1(x, y) = (\phi(x, y), \psi(x, y) - a(x, y)\phi(x, y)), \tag{7.21}$$

где $a(x, y)$ — непрерывная функция. Индекс нулевой особой точки y полей Φ и Φ_1 одинаков.

Доказательство первого утверждения очевидно. Второе утверждение вытекает из того, что векторы $\Phi(x, y)$ и $\Phi_1(x, y)$ ни в одной точке плоскости не направлены противоположно.

Вернемся к рассмотрению поля, компоненты которого имеют вид (7.14). Допустим, что

$$b_1(x, y) \equiv \dots \equiv b_{l-1}(x, y) \equiv 0,$$

а функция $b_l(x, y)$ не есть тождественный нуль, хотя $b_l(0, 1) = 0$. В этом случае применить лемму 7.1 для исследования нулевой особой точки нельзя. Из равенства $b_l(0, 1) = 0$ вытекает, что многочлен $b_l(x, y)$ представим в виде

$$b_l(x, y) = xa(x, y), \quad (7.22)$$

где $a(x, y)$ — однородный многочлен степени $l - 1$. Перейдем от поля (7.20) к полю (7.21), в котором $a(x, y)$ взята из представления (7.22). Нетрудно видеть, что компоненты поля (7.21) будут иметь также вид (7.14), причем в представлении (7.14) второй компоненты будут тождественно равны нулю первые l слагаемых. Для исследования нового поля можно попытаться применить лемму 7.1. Если ее условия не будут выполнены, то аналогичный прием позволяет перейти к полю, у которого вторая компонента имеет тождественно равными нулю многочлены до степени $l + 1$, и т.д.

Описанный алгоритм, вообще говоря, применим во всех тех случаях, когда индекс особой точки определяется лишь членами до определенного порядка малости. Особенно он удобен, если компоненты поля — это многочлены.

Рассмотрим, например, поле

$$\Phi(x, y) = (x + y^2, 2x + xy + 2y^2 + 2xy^2 + y^3). \quad (7.23)$$

Это поле условиям леммы 7.1 не удовлетворяет. Перейдем к полю (7.21), полагая $a(x, y) = 2$; новое поле имеет вид

$$\Phi_1(x, y) = (x + y^2, xy + 2xy^2 + y^3).$$

Это поле снова не удовлетворяет условиям леммы 7.1; переходим к новому полю $\Phi_2(x, y)$, полагая $a(x, y) = y$; новое поле имеет вид

$$\Phi_2(x, y) = (x + y^2, 2xy^2).$$

Производим еще одну такую операцию, полагая $a(x, y) = 2y^2$; новое поле имеет вид

$$\Phi_3(x, y) = (x + y^2, -2y^4).$$

Из лемм 7.1 и 7.2 вытекает, что нулевая особая точка поля (7.23) изолирована и ее индекс равен нулю.

Упражнение 7.5. Пусть выполнены условия

$$\begin{aligned} b_1(x, y) &\equiv \dots \equiv b_{r-1}(x, y) \equiv 0, \\ b_r(0, 1) &= \dots = b_{k-1}(0, 1) = 0, \quad b_k(0, 1) \neq 0, \\ a_2(0, 1) &= \dots = a_s(0, 1) = 0, \end{aligned}$$

и пусть

$$k < s + r.$$

Доказать, что при этих условиях справедливо утверждение леммы 7.1.

Упражнение 7.6. Вычислить индекс нулевой особой точки следующих векторных полей:

$$1) \Phi(x, y) = (-x + x^2 - 2xy + y^2, x^2 + 3xy - x^3 + 9x^2y - 7xy^2 + 64y^5),$$

$$2) \Phi(x, y) = (x + x^2 + 2xy + x^3 - 3xy^2 + y^4, x^2 + 3xy + 17xy^2 + 2y^5 - 2x^6 + 3x^2y^4).$$

Описанный в этом пункте алгоритм применим к исследованию нулевой особой точки, если хотя бы одно из чисел (7.2) отлично от нуля. В этом случае всегда можно перейти к полю, компоненты которого имеют вид (7.14). Покажем это.

Пусть для определенности $a_1 = \phi'_x(0, 0) \neq 0$. Перейдем от поля (7.1) к полю

$$\tilde{\Phi}(\xi, \eta) = \left(\phi \left(\frac{1}{a_1} \xi - \frac{a_2}{a_1} \eta, \eta \right), \psi \left(\frac{1}{a_1} \xi - \frac{a_2}{a_1} \eta, \eta \right) \right). \quad (7.24)$$

Компоненты $\tilde{\phi}(\xi, \eta)$ и $\tilde{\psi}(\xi, \eta)$ поля (7.24) представимы в виде (7.14) (проверьте!). Нетрудно видеть, что нулевая особая точка поля $\tilde{\Phi}(\xi, \eta)$ изолирована тогда и только тогда, когда изолирована нулевая особая точка поля $\Phi(x, y)$.

Индексы $\tilde{\gamma}$ и γ этих особых точек связаны, в силу теоремы 5.6, равенством

$$\gamma = \tilde{\gamma} \operatorname{sign} a_1, \quad (7.25)$$

так как $\operatorname{sign} a_1$ — это степень линейного преобразования

$$x = \frac{1}{a_1} \xi - \frac{a_2}{a_1} \eta, \quad y = \eta.$$

§ 8. Векторные поля с главной полилинейной частью

8.1. Полилинейное поле. Векторное поле $\Phi_0(M)$ назовем *полилинейным*¹¹, если каждая его компонента является однородным многочленом относительно x и y :

$$\Phi_0(x, y) = (a_m^0 x^m + a_{m-1}^1 x^{m-1} y + \dots + a_0^m y^m, b_n^0 x^n + b_{n-1}^1 x^{n-1} y + \dots + b_0^n y^n). \quad (8.1)$$

¹¹Вектор-функция $\Phi(u_1, \dots, u_n)$ векторных аргументов $u_i = (x_i, y_i)$ ($i = 1, \dots, n$) называется *n-линейной*, если она является линейной (аддитивной и однородной) вектор-функцией каждого своего аргумента:

$$\begin{aligned} \Phi(u_1, \dots, u_{i-1}, \alpha u_i + \beta v_i, u_{i+1}, \dots, u_n) = \\ = \alpha \Phi(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n) + \beta \Phi(u_1, \dots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, \dots, u_n). \end{aligned}$$

Полагая

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n = u = (x, y),$$

получаем вектор-функцию

$$\Phi_0(u) = \Phi(u, u, \dots, u),$$

которую называют *полилинейной*. Нетрудно видеть, что построенные таким образом вектор-функции являются частным случаем вектор-функций (8.1); для них $m = n$.

При $m = n = 1$ мы получаем линейное поле; если $m = n = 2$, то поле называется *билинейным*.

Полилинейное поле называется *невырожденным*, если нулевая точка является единственной особой точкой этого поля. Из однородности компонент полилинейного поля вытекает, что особые точки вырожденного поля образуют прямые, проходящие через начало координат.

Первая компонента поля (8.1) аннулируется на прямых $y = kx$, угловой коэффициент k которых является вещественным корнем уравнения

$$a_m^0 + a_{m-1}^1 k + \dots + a_0^m k^m = 0. \quad (8.2)$$

Если степень уравнения (8.2) меньше, чем m , то нужно считать, что уравнение имеет корень $k = \infty$; это значит, что первая компонента аннулируется на прямых $x = 0$.

Аналогично вторая компонента аннулируется на прямых, угловой коэффициент которых является корнем уравнения

$$b_n^0 + b_{n-1}^1 k + \dots + b_0^n k^n = 0. \quad (8.3)$$

Таким образом, полилинейное поле невырождено, если уравнения (8.2) и (8.3) не имеют одинаковых вещественных корней (включая корень $k = \infty$). Поэтому для исследования полилинейного поля достаточно проверить, что либо уравнение (8.2) имеет степень m , либо уравнение (8.3) имеет степень n , затем найти общий наибольший делитель многочленов

$$a_m^0 + a_{m-1}^1 k + \dots + a_0^m k^m, \quad b_n^0 + b_{n-1}^1 k + \dots + b_0^n k^n \quad (8.4)$$

(например, при помощи алгоритма Евклида). Если этот общий делитель не имеет вещественных корней, то поле невырождено.

8.2. Общая теорема. Рассмотрим поле

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = (a_m^0 x^m + a_{m-1}^1 x^{m-1} y + \dots + a_0^m y^m + \omega_1(x, y), \\ b_n^0 x^n + b_{n-1}^1 x^{n-1} y + \dots + b_0^n y^n + \omega_2(x, y)), \end{aligned} \quad (8.5)$$

где

$$\omega_1(x, y) = o((x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}), \quad \omega_2(x, y) = o((x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}). \quad (8.6)$$

Теорема 8.1. Пусть полилинейное поле (8.1) невырождено.

Тогда нулевая точка $(0, 0)$ будет изолированной особой точкой поля (8.5). Индекс γ_0 нулевой особой точки полей (8.1) и (8.5) одинаков.

Доказательство. Так как поле (8.1) невырождено, то единичную окружность $x^2 + y^2 = 1$ можно покрыть двумя замкнутыми множествами F_1 и F_2 так, чтобы на первом из них не аннулировалась первая компонента $P_0(x, y)$ поля (8.1), а на втором не аннулировалась вторая компонента $Q_0(x, y)$.

Пусть

$$\alpha_0 = \min_{F_1} |P_0(x, y)|, \quad \beta_0 = \min_{F_2} |Q_0(x, y)|. \quad (8.7)$$

Очевидно, числа α_0 и β_0 положительны.

Обозначим через \tilde{F}_1 множество точек плоскости, составленное из лучей, выходящих из нулевой точки и проходящих через точки множества F_1 . Аналогично определяется множество \tilde{F}_2 .

Из (8.7) и из однородности компонент поля (8.1) вытекают неравенства

$$\begin{aligned} |P_0(x, y)| &\geq \alpha_0(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}} \quad ((x, y) \in \tilde{F}_1), \\ |Q_0(x, y)| &\geq \beta_0(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \quad ((x, y) \in \tilde{F}_2). \end{aligned}$$

Из этих неравенств и из оценок (8.6) следует, что на пересечении окружностей $x^2 + y^2 = \rho^2$ малого радиуса ρ с множеством \tilde{F}_1 первая компонента поля (8.5) имеет тот же знак, что и первая компонента поля (8.1). На пересечении указанных окружностей с \tilde{F}_2 одинаковый знак имеют вторые компоненты полей (8.1) и (8.5). Таким образом, на окружностях малого радиуса векторы полей (8.1) и (8.5) не направлены противоположно. Из теоремы 4.3 вытекает, что эти поля гомотопны. Следовательно, их вращения одинаковы.

Теорема доказана.

8.3. Частный класс полилинейных полей. Рассмотрим поле Φ_0 вида

$$\Phi_0(x, y) = ((a_1x - b_1y) \dots (a_nx - b_ny), (c_1x - d_1y) \dots (c_nx - d_ny)). \quad (8.8)$$

Будем предполагать, что прямые

$$a_i x - b_i y = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (8.9)$$

и

$$c_i x - d_i y = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (8.10)$$

все различны, причем прямые семейства (8.9) перемежаются с прямыми семейства (8.10) (см. рис. 8.1). Это значит, что перемежаются корни уравнений (8.2) и (8.3), построенных по компонентам поля (8.8).

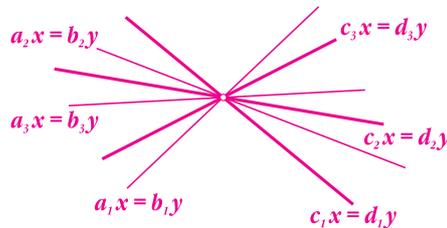


Рис. 8.1

Мы покажем, что индекс γ_0 нулевой особой точки по абсолютной величине равен n , и найдем знак этого индекса.

Лемма 8.1¹². Пусть $f_1(k)$ и $f_2(k)$ — два многочлена с вещественными коэффициентами, корни которых вещественные, простые и перемежаются.

Тогда определитель

$$D(k) = \begin{vmatrix} f_1(k) & f_1'(k) \\ f_2(k) & f_2'(k) \end{vmatrix} \quad (8.11)$$

при всех k отличен от нуля и, следовательно, имеет постоянный знак.

Доказательство. Из того, что корни перемежаются, вытекает, что степени многочленов $f_1(k)$, $f_2(k)$ либо одинаковы, либо отличаются на 1. Для определенности будем считать, что степень n многочлена $f_2(k)$ не меньше степени многочлена $f_1(k)$. Корни многочлена $f_2(k)$, расположенные в порядке возрастания, обозначим через k_1, \dots, k_n .

Представим отношение $\frac{f_1(k)}{f_2(k)}$ в виде

$$g(k) = \frac{f_1(k)}{f_2(k)} = A_0 + \frac{A_1}{k - k_1} + \dots + \frac{A_n}{k - k_n}, \quad (8.12)$$

где A_i — некоторые постоянные.

При значениях k , близких к k_2 и меньших, чем k_2 , знак значений $g(k)$ будет совпадать со знаком значений $g(k)$ при $k < k_1$, так как знак $g(k)$ меняется и при переходе через корень функции $f_1(k)$ и при переходе через корень функции $f_2(k)$. Из аналогичных рассуждений вытекает, что знак $g(k)$ будет одинаков при значениях k , близких к любому k_i и меньших, чем этот корень k_i .

Знак $g(k)$ при близких к k_i значениях k совпадает со знаком $A_i(k - k_i)$. Поэтому все A_i ($i = 1, \dots, n$) имеют одинаковый знак.

Продифференцируем равенство (8.12):

$$\frac{f_1'(k)f_2(k) - f_1(k)f_2'(k)}{f_2^2(k)} = -\frac{A_1}{(k - k_1)^2} - \dots - \frac{A_n}{(k - k_n)^2}.$$

Из этого тождества вытекает, что $D(k)$ принимает значения одного знака при всех k , отличных от k_1, \dots, k_n .

Остается заметить, что $D(k_i) \neq 0$. В предположении противного имело бы место равенство $f_2'(k_i) = 0$ и k_i был бы кратным корнем многочлена $f_2(k)$.

Лемма доказана.

Покажем теперь, что угловая функция $\theta(t)$ поля (8.8) на единичной окружности монотонна. Для доказательства рассмотрим на правой и левой полуокружностях параметр $k = \frac{y}{x}$. Возрастанию этого параметра на каждой полуокружности соответствует обход этой полуокружности в положительном направлении.

Компоненты поля (8.8) обозначим через $P_0(x, y)$, $Q_0(x, y)$. Очевидно,

$$P_0(x, y) = x^n P_0(1, k), \quad Q_0(x, y) = x^n Q_0(1, k),$$

¹²Н.Г. Чеботарев, Н.Н. Мейман, *Проблема Рауса – Гурвица для полиномов и целых функций*, Труды Матем. института им. В. А. Стеклова АН СССР, **26** (1949).

причем многочлены $P_0(1, k)$ и $Q_0(1, k)$ имеют перемежающиеся вещественные корни. В силу леммы 8.1 определитель

$$\Delta_0(k) = \begin{vmatrix} P_0(1, k) & \frac{\partial}{\partial y} P_0(1, k) \\ Q_0(1, k) & \frac{\partial}{\partial y} Q_0(1, k) \end{vmatrix} \quad (8.13)$$

не обращается в нуль и имеет постоянный знак.

Далее,

$$\frac{d\theta(k)}{dk} = \frac{d}{dk} \operatorname{arctg} \frac{Q_0(x, y)}{P_0(x, y)} = \frac{d}{dk} \operatorname{arctg} \frac{Q_0(1, k)}{P_0(1, k)} = \frac{\Delta_0(k)}{(P_0(1, k))^2 + (Q_0(1, k))^2}$$

и

$$\operatorname{sign} \frac{d\theta(k)}{dk} = \operatorname{sign} \Delta_0(k) = \operatorname{sign} \Delta_0(0).$$

Итак, знак индекса γ_0 нулевой особой точки поля (8.8) определяется равенством

$$\operatorname{sign} \gamma_0 = \operatorname{sign} \Delta_0(0).$$

Угловая функция $\theta(t)$ поля (8.8) на единичной окружности принимает значения, кратные π , в тех точках, в которых вторая компонента поля обращается в нуль. Количество таких точек равно $2n$. Поэтому вращение поля на единичной окружности по абсолютной величине равно n .

Нами доказана

Теорема 8.2. *Индекс γ_0 нулевой особой точки поля (8.8) определяется равенством*

$$\gamma_0 = n \operatorname{sign} \Delta_0(0). \quad (8.14)$$

Рассмотрим в качестве примера поле

$$\Phi(x, y) = ((x - y)(x - 3y)(x - 5y), (x - 2y)(x - 4y)(x - 6y)).$$

Из теоремы 8.2 вытекает, что

$$\gamma_0 = 3 \operatorname{sign} \begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 1 & -12 \end{vmatrix} = -3.$$

Упражнение 8.1. *Вычислить индекс особой точки поля:*

1) $\Phi(x, y) = (y(y - 2x)(2y + 3x)(2y - x), -x(y + x)(2y - 3x)(3y - x)),$

2) $\Phi(x, y) = (x^3 - x^2y - 9xy^2 - 9y^3, x^2y - 4y^3).$

8.4. Общий случай полилинейных полей¹³. Перейдем к рассмотрению невырожденного полилинейного поля (8.1) общего вида. Наша цель заключается в том, чтобы вычисление индекса его нулевой особой точки свести к случаю, когда применима теорема 8.2.

Каждую однородную функцию

$$T(x, y) = c_n^0 x^n + c_{n-1}^1 x^{n-1} y + \dots + c_0^n y^n$$

можно разложить на вещественные линейные и неприводимые квадратичные множители. Для этого достаточно ввести обозначение $y = kx$, записать функцию $T(x, y)$ в виде

$$T(x, y) = x^n f(k),$$

разложить $f(k)$ на линейные и неприводимые квадратичные множители¹⁴, а затем снова произвести замену $k = \frac{y}{x}$.

Поэтому общий вид полилинейного поля дается равенством

$$\Phi(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)), \quad (8.15)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — произведения линейных и квадратичных множителей.

Без ограничения общности можно считать, что неприводимые квадратичные множители не принимают отрицательных значений. Обозначим через $P_1(x, y)$ и $Q_1(x, y)$ многочлены, в которые перейдут многочлены $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ соответственно, если в них зачеркнуть неотрицательные квадратичные множители.

Нетрудно видеть, что индекс γ_0 нулевой особой точки поля (8.15) совпадает с индексом γ_1 нулевой особой точки поля

$$\Phi_1(x, y) = (P_1(x, y), Q_1(x, y)). \quad (8.16)$$

Для доказательства достаточно заметить, что ни в одной точке единичной окружности векторы полей Φ и Φ_1 не направлены противоположно (ненулевая компонента сохраняет знак). Из теоремы 4.3 вытекает, что вращения полей Φ_0 и Φ_1 на единичной окружности одинаковы. Это и означает, что индексы γ_0 и γ_1 совпадают.

В общем случае поле (8.16) имеет вид

$$\Phi_1(x, y) = (a_1 x - b_1 y) \dots (a_{m_1} x - b_{m_1} y), (c_1 x - d_1 y) \dots (c_{n_1} x - d_{n_1} y). \quad (8.17)$$

Если это поле удовлетворяет условиям теоремы 8.2, то наша задача решена.

Допустим, что прямые $P_1(x, y) = 0$ не перемежаются с прямыми $Q_1(x, y) = 0$. Для определенности предположим, что между прямыми $a_1 x = b_1 y$ и $a_2 x = b_2 y$ нет ни одной прямой $Q_1(x, y) = 0$. В частности, эти две прямые могут совпадать.

¹³Вычисление индекса особой точки полилинейных полей при помощи формулы Пуанкаре проведено для ряда случаев в статьях **П.Т. Черевичного** (см., например, Научные записки Одесского политехнического института, тома **23, 24, 31**, 1960, 1961 гг.). В 1962 г. появились дальнейшие работы этого автора.

¹⁴См. **А.Г. Курош**, *Курс высшей алгебры*, Физматгиз, 1963.

Прямые $a_1x = b_1y$ и $a_2x = b_2y$ делят плоскость на четыре части (см. рис. 8.2). Без ограничения общности можно считать, что прямых $Q_1(x, y) = 0$ нет в тех двух углах, в которых функция

$$\phi(x, y) = [a_1x - b_1y][a_2x - b_2y]$$

отрицательна. Введем обозначение

$$P_1(x, y) = \phi(x, y)P_2(x, y).$$

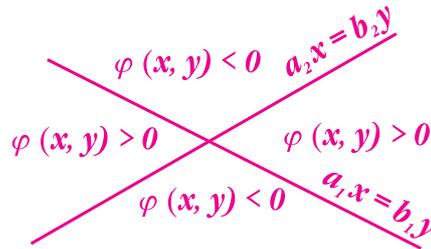


Рис. 8.2

Тогда индекс γ_1 нулевой особой точки поля (8.16) совпадает с индексом γ_2 нулевой особой точки поля

$$\Phi_2(x, y) = (P_2(x, y), Q_1(x, y)). \quad (8.18)$$

Для доказательства достаточно заметить, что векторы полей Φ_1 и Φ_2 ни в одной точке единичной окружности не направлены противоположно. Это следует из того, что на прямых $Q_1(x, y)$ функция $\phi(x, y)$ положительна, и поэтому на этих прямых векторы Φ_1 и Φ_2 направлены одинаково. В остальных точках одинаковы вторые компоненты $Q_1(x, y)$.

Совершенно аналогично можно вычеркивать два линейных множителя в функции $Q_1(x, y)$, если между соответствующими прямыми нет прямых $P_1(x, y) = 0$.

Вычеркивая последовательно пары линейных множителей, придем либо к полю, индекс которого можно вычислить при помощи теоремы 8.2, либо к полю, у которого одна из компонент — константа.

В качестве примера найдем индекс γ нулевой особой точки поля (8.15), где

$$P(x, y) = (2x - y)(3x - 2y)(x + y)(x^2 + 4xy + 5y^2),$$

$$Q(x, y) = (x - y)(x^2 + y^2)(22x^2 + xy + 2y^2).$$

По описанному правилу можно перейти к полю Φ_1 с компонентами

$$P_1(x, y) = (2x - y)(3x - 2y)(x + y),$$

$$Q_1(x, y) = x - y,$$

а затем к полю Φ_2 с компонентами

$$P_2(x, y) = x + y,$$

$$Q_2(x, y) = x - y,$$

индекс нулевой особой точки которого равен -1 .

Упражнение 8.2. Вычислить индекс нулевой особой точки следующих полей:

1) $\Phi(x, y) = ((2x + y)(x - 2y)(3x - y)(3x^2 + 2y^2), x^4y - y^5),$

2) $\Phi(x, y) = ((2x + 3y) \sin(x^2 + 16y^2), (3x - 2y) \sin(x^2 - 16y^2)).$

Описанный способ перехода от одних полилинейных полей к другим полилинейным полям, компоненты которых имеют низшую степень, может привести к полю, у которого одна из компонент не зависит от x и y , а является постоянным числом. В этом случае индекс γ_0 особой точки равен нулю.

Рассмотрим, например, поле, одна из компонент которого имеет четную степень, а вторая — нечетную. Тогда при вычеркивании квадратичных множителей это соотношение четностей степеней компонент сохранится. Мы в конце концов всегда перейдем к полю, у которого одна компонента имеет нулевую степень. Нами доказана

Теорема 8.3. Пусть компоненты невырожденного полилинейного поля являются многочленами, один из которых имеет четную степень, а второй — нечетную.

Тогда индекс нулевой особой точки этого поля равен нулю.

Упражнение 8.3.

1) Покажите, что теорема 8.3 является следствием утверждения, сформулированного в упражнении 2.6.

2) Пусть у некоторого (не обязательно полилинейного) поля Φ нулевая точка является изолированной особой точкой. Пусть одна из компонент $\phi_1(x, y)$ поля Φ является четной функцией ($\phi_1(-x, -y) \equiv \phi_1(x, y)$), а вторая $\phi_2(x, y)$ — нечетной ($\phi_2(-x, -y) \equiv -\phi_2(x, y)$). Покажите, что тогда индекс нулевой особой точки равен нулю.

Изложенный в этом пункте метод вычисления индекса особой точки полилинейного поля (8.1) требует представления компонент поля в виде произведения линейных и квадратичных множителей. Для того чтобы получить такое представление, нужно найти корни уравнений (8.2) и (8.3). Это, как известно, нелегкая задача. В связи с этим ниже будет изложен другой метод вычисления индекса, не требующий решения алгебраических уравнений.

Впрочем, следует иметь в виду, что в описанном методе можно обойтись знанием приближенных значений корней уравнений (8.2) и (8.3).

8.5. Билинейные поля. В этом пункте мы изучим билинейное поле

$$\Phi(x, y) = (a_1x^2 + 2a_2xy + a_3y^2, b_1x^2 + 2b_2xy + b_3y^2). \quad (8.19)$$

Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}. \quad (8.20)$$

Если ее ранг равен 1, то

$$a_1x^2 + 2a_2xy + a_3y^2 \equiv \lambda(b_1x^2 + 2b_2xy + b_3y^2),$$

где λ — некоторая постоянная. Здесь могут представиться два случая. Может оказаться, что многочлен $a_1x^2 + 2a_2xy + a_3y^2$ знакопостоянен (обращается в нуль лишь при $x = y = 0$); тогда нулевая особая точка изолирована и ее индекс равен нулю. Если многочлен $a_1x^2 + 2a_2xy + a_3y^2$ аннулируется на одной или двух прямых (если уравнение $a_1 + 2a_2k + a_3k^2 = 0$ имеет вещественные корни), то нулевая особая точка не изолирована.

Исследование поля (8.19) становится более сложным, если ранг матрицы (8.20) равен 2 или, что то же, если один из определителей

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \quad (8.21)$$

отличен от нуля. В этом предположении и проводится дальнейшее исследование.

Введем обозначение:

$$D = 4D_1D_2 - D_3^2. \quad (8.22)$$

Теорема 8.4. *Нулевая особая точка поля (8.19) изолирована в том и только том случае, если $D \neq 0$.*

Если $D < 0$, то индекс γ_0 нулевой особой точки поля (8.19) равен нулю:

$$\gamma_0 = 0.$$

Если $D > 0$, то индекс γ_0 нулевой особой точки поля (8.19) определяется формулой

$$\gamma_0 = 2 \operatorname{sign} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}. \quad (8.23)$$

Доказательство. Если нулевая особая точка поля (8.19) не изолирована, то существуют такие x_0 и y_0 ($x_0^2 + y_0^2 = 1$), что

$$a_1x_0^2 + 2a_2x_0y_0 + a_3y_0^2 = 0,$$

$$b_1x_0^2 + 2b_2x_0y_0 + b_3y_0^2 = 0.$$

Эти равенства означают, что трехмерный вектор (x_0^2, x_0y_0, y_0^2) ортогонален векторам $A = [a_1, 2a_2, a_3]$ и $B = (b_1, 2b_2, b_3)$ и, следовательно, коллинеарен векторному произведению

$$A \times B = (2a_2b_3 - 2a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, 2a_1b_2 - 2a_2b_1) = (2D_2, -D_3, 2D_1).$$

Следовательно,

$$x_0^2 = 2\lambda D_2, \quad x_0 y_0 = -\lambda D_3, \quad y_0^2 = 2\lambda D_1, \quad (8.24)$$

где λ — отличное от нуля число. Из равенств (8.24) вытекает, что

$$\lambda^2 D_3^2 = x_0^2 y_0^2 = 2\lambda D_1 \cdot 2\lambda D_2 = 4\lambda^2 \cdot D_1 D_2,$$

то есть $D = 0$.

Допустим, что нулевая особая точка изолирована и ее индекс равен нулю. Рассмотрим угловую функцию $\theta(t)$ поля (8.19) на каком-либо квадрате $\max\{|x|, |y|\} = \rho$ (см. рис. 8.3). Пусть на правой вертикальной стороне квадрата параметр t отличается от ординаты y постоянным слагаемым. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(t)}{dt} &= \frac{d\theta}{dy} = \frac{d}{dy} \operatorname{arctg} \frac{b_1 x^2 + 2b_2 xy + b_3 y^2}{a_1 x^2 + 2a_2 xy + a_3 y^2} = \\ &= \frac{2(b_2 x + b_3 y)(a_1 x^2 + 2a_2 xy + a_3 y^2)}{(a_1 x^2 + 2a_2 xy + a_3 y^2)^2 + (b_1 x^2 + 2b_2 xy + b_3 y^2)^2} - \\ &- \frac{2(a_2 x + a_3 y)(b_1 x^2 + 2b_2 xy + b_3 y^2)}{(a_1 x^2 + 2a_2 xy + a_3 y^2)^2 + (b_1 x^2 + 2b_2 xy + b_3 y^2)^2} = \\ &= \frac{2x \begin{vmatrix} a_1 x + a_2 y & a_2 x + a_3 y \\ b_1 x + b_2 y & b_2 x + b_3 y \end{vmatrix}}{(a_1 x^2 + 2a_2 xy + a_3 y^2)^2 + (b_1 x^2 + 2b_2 xy + b_3 y^2)^2}. \end{aligned}$$

Пусть на верхней горизонтальной стороне квадрата параметр t также отличается от абсциссы x постоянным слагаемым; тогда

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{d\theta}{dx} = \frac{2y \begin{vmatrix} a_1 x + a_2 y & a_2 x + a_3 y \\ b_1 x + b_2 y & b_2 x + b_3 y \end{vmatrix}}{(a_1 x^2 + 2a_2 xy + a_3 y^2)^2 + (b_1 x^2 + 2b_2 xy + b_3 y^2)^2}$$

Угловая функция не может быть монотонна (вращение на квадрате равно нулю); поэтому определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 x + a_2 y & a_2 x + a_3 y \\ b_1 x + b_2 y & b_2 x + b_3 y \end{vmatrix} \quad (8.25)$$

должен принимать значения разных знаков. Иначе говоря, квадратичная форма

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} xy + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} y^2 \quad (8.26)$$

должна быть знакопеременной. Поэтому

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 > 4 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

то есть $D < 0$.

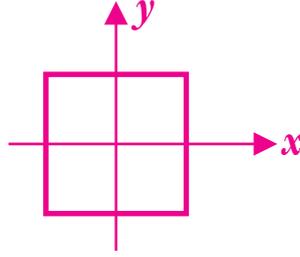


Рис. 8.3

Осталось рассмотреть случай, когда нулевая особая точка изолирована и ее индекс по абсолютной величине равен 2. Из результатов предыдущих пунктов вытекает, что в этом случае каждое из уравнений

$$a_1x^2 + 2a_2xy + a_3y^2 = 0,$$

$$b_1x^2 + 2b_2xy + b_3y^2 = 0$$

определяет две прямые, причем прямые, определяемые первым уравнением, пересекаются с прямыми, определяемыми вторым уравнением. В этих условиях было показано, что определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 + 2a_2k + a_3k^2 & 2a_2 + 2a_3k \\ b_1 + 2b_2k + b_3k^2 & 2b_2 + 2b_3k \end{vmatrix}$$

(в общем случае — определитель (8.13)) отличен от нуля при всех k . Аналогично можно показать, что отличен от нуля при всех m определитель

$$\begin{vmatrix} a_1m^2 + 2a_2m + a_3 & 2a_1m + a_2 \\ b_1m^2 + 2b_2m + b_3 & 2b_1m + 2b_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, определитель (8.25) не обращается в нуль при $x^2 + y^2 > 0$. Значит, квадратичная форма (8.26) знакоопределенна. Поэтому $D > 0$.

Формула (8.23) вытекает из (8.14).

Теорема доказана.

Упражнение 8.4. Вычислить индекс особой точки поля $\Phi(x, y)$ в точке (x_0, y_0) для

- 1) $\Phi(x, y) = (x^2 - 2xy + y^2, xy)$, $x_0 = y_0 = 0$;
- 2) $\Phi(x, y) = (xy + x - y - 1, x^2 - y^2 - 2x - 2y)$, $x_0 = 1$, $y_0 = -1$;
- 3) $\Phi(x, y) = (2x^2 - 3xy + y^2, xy + y^2)$, $x_0 = y_0 = 0$;
- 4) $\Phi(x, y) = (x(x^2 - y^2) - 1, x(xy - 1))$, $x_0 = y_0 = 0$;
- 5) $\Phi(x, y) = ((x + y - 1) \sin y, (x - 1)(\ln x - 2y))$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

8.6. Основная формула для вычисления индекса. Как уже отмечалось выше, изложенный в п. 8.4 метод вычисления индекса неудобен, так как он требует решения алгебраических уравнений высоких степеней. В этом пункте излагается другой метод.

Предварительно отметим одну формулу для вычисления вращения γ поля

$$\Phi(M) = (P(M), Q(M)) \quad (8.27)$$

на замкнутой кривой Γ , вытекающую из (2.7).

Пусть горизонтальная компонента $P(M)$ обращается в нуль лишь в конечном числе точек M_1, M_2, \dots, M_k кривой Γ . Тогда

$$\gamma = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k \text{sign } Q(M_i) (\text{sign } P(M_i - 0) - \text{sign } P(M_i + 0)), \quad (8.28)$$

где через $\text{sign } P(M_i - 0)$ и $\text{sign } P(M_i + 0)$ обозначены знаки компоненты $P(M)$ в точках M , близких к M_i , и лежащих на Γ соответственно до и после M_i (при обходе Γ в положительном направлении).

Вернемся к изучению полилинейного поля

$$\Phi_0(x, y) = (a_m^0 x^m + a_{m-1}^1 x^{m-1} y + \dots + a_0^m y^m, b_n^0 x^n + b_{n-1}^1 x^{n-1} y + \dots + b_0^n y^n). \quad (8.29)$$

Всюду далее предполагается, что нулевая точка является изолированной особой точкой этого поля.

Если числа m и n имеют различную четность, то индекс нулевой особой точки равен нулю (теорема 8.3). Поэтому в дальнейшем рассматривается лишь тот случай, когда m и n имеют одинаковую четность.

Для простоты мы будем считать, что

$$a_0^m \neq 0. \quad (8.30)$$

Это условие не ограничивает общности рассмотрений: если оно не выполнено, то достаточно перейти к полю $(Q(x, y), -P(x, y))$.

Обозначим через k_1, \dots, k_s ($s \leq m$) вещественные корни уравнения (8.2). Обе точки пересечения каждой прямой $y = k_i x$ с единичной окружностью $x^2 + y^2 = 1$ будут точками, в которых горизонтальная компонента поля (8.29) равна нулю. Абсциссы этих точек обозначим через x_i и $-x_i$.

Компоненты поля (8.29) в точке $M = (x, y)$ определяются, очевидно, равенствами

$$P(M) = x^m P\left(1, \frac{y}{x}\right), \quad Q(M) = x^n Q\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

где

$$P(1, k) = a_m^0 + a_{m-1}^1 k + \dots + a_0^m k^m, \quad (8.31)$$

$$Q(1, k) = b_n^0 + b_{n-1}^1 k + \dots + b_0^n k^n. \quad (8.32)$$

Поэтому из (8.28) вытекает следующее выражение для индекса γ_0 нулевой особой точки поля (8.29):

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^s \text{sign } x_i^n Q(1, k_i) (\text{sign } x_i^m P(1, k_i - 0) - \text{sign } x_i^m P(1, k_i + 0)) + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^s \text{sign } (-x_i)^n Q(1, k_i) (\text{sign } (-x_i)^m P(1, k_i - 0) - \text{sign } (-x_i)^m P(1, k_i + 0)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^s \operatorname{sign} x_i^{m+n} Q(1, k_i) (\operatorname{sign} P(1, k_i - 0) - \operatorname{sign} P(1, k_i + 0)) + \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^s \operatorname{sign} (-x_i)^{m+n} Q(1, k_i) (\operatorname{sign} P(1, k_i - 0) - \operatorname{sign} P(1, k_i + 0)).
\end{aligned}$$

Так как сумма $m + n$ четна, то полученное выражение можно переписать в виде

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \operatorname{sign} Q(1, k_i) (\operatorname{sign} P(1, k_i - 0) - \operatorname{sign} P(1, k_i + 0)). \quad (8.33)$$

Упражнение 8.5. Вычислить, пользуясь формулой (8.33), индекс нулевой особой точки следующих полей:

- 1) $\Phi(x, y) = (x^3 - x^2y - 9xy^2 + 9y^3, x^2y - 4y^3)$,
- 2) $\Phi(x, y) = (x^3 - x^2y - 9xy^2 + 9y^3, x^3y - 4xy^3)$,
- 3) $\Phi(x, y) = (\sin(x + y), \cos(x - y) - 1)$.

Правую часть в формуле (8.33), как оказывается, можно найти, не отыскивая корней k_1, \dots, k_s .

Введем обозначения

$$T_0(k) = P(1, k), \quad T_1(k) = Q(1, k). \quad (8.34)$$

Пользуясь алгоритмом Евклида, построим такие многочлены

$$T_0(k), T_1(k), \dots, T_l(k), \quad (8.35)$$

что

$$\begin{aligned}
T_0(k) &= \varepsilon_1(k)T_1(k) - T_2(k), \\
T_1(k) &= \varepsilon_2(k)T_2(k) - T_3(k), \\
&\dots\dots\dots, \\
T_{i-1}(k) &= \varepsilon_i(k)T_i(k) - T_{i+1}(k), \\
&\dots\dots\dots, \\
T_{l-1}(k) &= \varepsilon_l(k)T_l(k).
\end{aligned} \quad (8.36)$$

Многочлены (8.35) образуют, как говорят, *обобщенный ряд Штурма*.

Многочлен $T_l(k)$ — это общий наибольший делитель многочленов (8.34). Этот многочлен не имеет вещественных корней, так как поле (8.29) невырождено. Проверка невырожденности поля требовала отыскания многочлена $T_l(k)$; при этом были найдены и многочлены (8.35).

Обозначим через $s(k)$ число перемен знака в ряде чисел (8.35) и проследим, как меняется это число при возрастании k . Очевидно, $s(k)$ может измениться лишь при переходе через корень k_0 одного из многочленов (8.35).

Пусть вначале $T_i(k_0) = 0$, где i — одно из чисел $1, \dots, l - 1$. Из (8.36) вытекает, что числа $T_{i-1}(k_0)$ и $T_{i+1}(k_0)$ отличны от нуля, причем

$$T_{i-1}(k_0)T_{i+1}(k_0) < 0.$$

Следовательно, и при близких к k_0 значениях k выполняется неравенство

$$T_{i-1}(k)T_{i+1}(k) < 0,$$

откуда следует, что число перемен знака не изменится при переходе через k_0 .

Пусть теперь $T_0(k_0) = 0$. В этом случае, как легко видеть, при переходе через k_0 число перемен знака изменится на величину

$$\Delta s(k_0) = \frac{1}{2} \operatorname{sign} T_1(k_0) (\operatorname{sign} T_0(k_0 - 0) - \operatorname{sign} T_0(k_0 + 0)).$$

Поэтому

$$s(b) - s(a) = \frac{1}{2} \sum \operatorname{sign} T_1(k_i) (\operatorname{sign} T_0(k_i - 0) - \operatorname{sign} T_0(k_i + 0)), \quad (8.37)$$

где сумма распространена на все корни k_i многочлена $T_1(k)$, расположенные на $[a, b]$.

Из равенств (8.33), (8.34) и (8.37) вытекает

Теорема 8.5. *Индекс изолированной нулевой особой точки полилинейного поля (8.29) определяется формулой*

$$\gamma_0 = s(\infty) - s(-\infty). \quad (8.38)$$

Через $s(-\infty)$ здесь обозначено значение $s(k)$ при отрицательных и больших по абсолютной величине k , а через $s(\infty)$ — значения $s(k)$ при больших положительных k .

Упражнение 8.6. *Вычислить индекс нулевой особой точки поля*

$$\Phi(x, y) = (x^3 + xy^2 - y^3, x^5 + x^3y^2 + x^2y^3 - xy^4 + y^5).$$

8.7. Асимптотически полилинейные поля. Рассмотрим

$$\Phi(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)), \quad (8.39)$$

в котором каждая компонента является многочленом (неоднородным!) относительно x и y ; степени этих многочленов обозначим соответственно через m и n . Обозначим через $P_m(x, y)$ и $Q_n(x, y)$ сумму всех слагаемых старшей степени в многочленах $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ соответственно.

Допустим, что полилинейное поле

$$\Phi_0(x, y) = (P_m(x, y), Q_n(x, y)) \quad (8.40)$$

невырождено. Индекс γ_0 его нулевой особой точки может быть вычислен, например, по формуле (8.38). Аналогично тому, как доказывалась теорема 8.1, можно установить следующее утверждение, обобщающее теорему 6.4:

Теорема 8.6. Вращение поля (8.39) на окружностях $x^2 + y^2 = R^2$ большого радиуса R равно индексу γ_0 нулевой особой точки поля (8.40).

Аналогичное утверждение справедливо для асимптотически полилинейных полей (8.39), компоненты которых не являются многочленами, но удовлетворяют неравенствам

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \frac{P(x, y) - P_m(x, y)}{(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}} = \lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \frac{Q(x, y) - Q_n(x, y)}{(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}} = 0. \quad (8.41)$$

§ 9. Особые точки аналитических функций

9.1. Функция $w = z^n$. Комплексное число $z = x + iy$ будем рассматривать как точку комплексной плоскости. Функция

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (9.1)$$

определяет отображение Φ комплексной плоскости на себя или, что то же, векторное поле

$$\Phi(x, y) = (u(x, y), v(x, y)). \quad (9.2)$$

Особую точку поля (9.2) будем называть *особой точкой функции $f(z)$* . Таким образом, к особым точкам мы относим и нули функции $f(z)$.

Особой точке функции будем приписывать индекс, который определяется как индекс особой точки соответствующего векторного поля (9.2).

В этом пункте рассмотрим простейшую функцию

$$w = z^n, \quad (9.3)$$

где n — целое положительное или отрицательное число. Если в комплексной плоскости рассмотреть обычные полярные координаты ρ и t (см. рис. 9.1), то z в тригонометрической форме запишется в виде

$$z = \rho e^{it}. \quad (9.4)$$

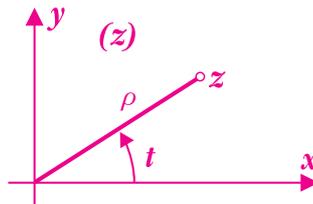


Рис. 9.1

После этого отображение (9.3) можно записать в следующей форме:

$$w = \rho^n e^{int}. \quad (9.5)$$

Рассмотрим отображение (9.5) на единичной окружности. Формула (9.5) означает, что угловая функция $\theta(t)$ имеет простой вид: $\theta(t) = nt$. Поэтому вращение поля z^n на единичной окружности равно n . Но это вращение равно индексу единственной особой точки $z = 0$.

Таким образом, доказана

Теорема 9.1. *Индекс особой точки $z = 0$ функции $w = z^n$ равен n при любом целом положительном или отрицательном n .*

Упражнение 9.1. *Доказать теорему 9.1 для положительных n , используя тот факт, что поле (9.3) полилинейно.*

9.2. Индекс нуля аналитической функции. Пусть $f(z)$ аналитична в точке z_0 , и пусть $f(z_0) = 0$. Тогда, как известно, функция $f(z)$ может быть представлена в виде

$$f(z) = a_0(z - z_0)^n \phi(z), \quad (9.6)$$

где n — некоторое комплексное число, n — целое положительное число (которое называется порядком нуля), $f(z)$ — аналитическая в окрестности z_0 функция, удовлетворяющая условию $\phi(z_0) = 1$.

Теорема 9.2. *Индекс нуля n -го порядка аналитической функции равен n .*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$h(z) = (z - z_0)^n \phi(z). \quad (9.7)$$

На окружностях $|z - z_0| = r$ малого радиуса r векторы $h(z)$ и векторы $(z - z_0)^n$ не направлены противоположно, так как

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (\arg h(z) - \arg (z - z_0)^n) = \lim_{z \rightarrow z_0} \arg \frac{h(z)}{(z - z_0)^n} = \lim_{z \rightarrow z_0} \arg \phi(z) = 0.$$

Из теоремы 4.3 вытекает, что вращения полей $h(z)$ и $(z - z_0)^n$ на окружностях малого радиуса одинаковы. Из теоремы 9.1 следует, что вращение γ поля $h(z)$ равно n .

Переход от поля $h(z)$ к полю $f(z)$ заключается в изменении длин векторов и в повороте их на одинаковый угол $\arg a_0$. При таком переходе вращение не меняется. Следовательно, поле $f(z)$ на окружностях $|z - z_0| = r$ малого радиуса r имеет вращение, равное n .

Теорема доказана.

9.3. Индекс полюса. Особая точка z_0 аналитической функции $f(z)$ называется *полюсом порядка n* , если $f(z)$ в окрестности z_0 представима в виде

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^n}, \quad (9.8)$$

где $\phi(z)$ аналитична в окрестности z_0 и $\phi(z_0) \neq 0$.

Теорема 9.3. *Индекс полюса порядка n аналитической функции равен $-n$.*

Для доказательства можно воспользоваться тем фактом, что в окрестности z_0 главной частью поля $f(z)$ является поле $(z - z_0)^{-n}\phi(z_0)$, а затем применить теорему 9.1. Детали предоставляем читателю.

Упражнение 9.2.

1) Пусть бесконечно удаленная точка $z = \infty$ является нулем или полюсом аналитической функции $f(z)$. Индексом бесконечно удаленной особой точки назовем взятое с обратным знаком вращение поля $f(z)$ на окружностях $|z| = R$ большого радиуса R . Найти зависимость между порядком нуля или полюса $z = \infty$ и индексом этой особой точки.

2) Доказать, что сумма индексов всех особых точек (в расширенной комплексной плоскости) функции

$$f(z) = \frac{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}{z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}$$

равна нулю.

ГЛАВА 3 ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 10. Разрешимость уравнений

10.1. Теорема Боля-Брауэра. Пусть F — непрерывное преобразование круга K в себя. Определим на K векторное поле Φ равенством (см. рис. 10.1)

$$\Phi(M) = F(M) - M. \quad (10.1)$$

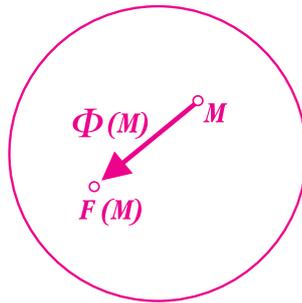


Рис. 10.1

Если на граничной окружности S преобразование F не имеет неподвижных точек, то есть поле $\Phi(M)$ не имеет на S нулевых векторов, то ни в одной точке $M \in S$ вектор $\Phi(M)$ не направлен противоположно вектору внутренней нормали к окружности. В силу теоремы 4.3 вращение γ поля Φ равно вращению поля внутренних нормалей, а вращение поля внутренних нормалей равно 1. Из равенства $\gamma = 1$ и теоремы 3.1 вытекает, что поле Φ по крайней мере в одной точке круга обращается в нуль. Это утверждение составляет содержание теоремы Боля-Брауэра.

Теорема 10.1. *Непрерывное отображение круга в себя имеет по крайней мере одну неподвижную точку.*

Для того чтобы оценить красоту и нетривиальность теоремы Боля – Брауэра, полезно помнить, что при отображении на себя более сложных фигур, чем круг, неподвижные точки могут отсутствовать. Например, поворот кругового кольца на

некоторый угол (см. рис. 10.2) является преобразованием без неподвижных точек кольца в себя.

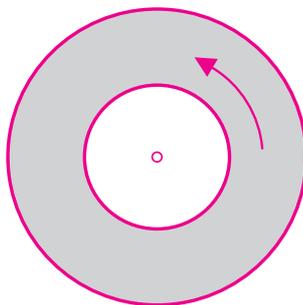


Рис. 10.2

Упражнение 10.1.

1) Показать, что ν -связную область при $\nu > 2$ можно непрерывно отобразить на себя без неподвижных точек.

2) Пусть задана ν -связная область Ω , где $\nu > 2$. Через T_ε будем обозначать такие отображения Ω на себя, при которых каждая точка сдвигается не больше чем на ε . Доказать что отображение T_ε имеет неподвижную точку, если $\varepsilon < k$, где $k = k(\Omega) > 0$.

Теорема 10.2. Непрерывное отображение F гомеоморфного кругу K множества T в себя имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

Доказательство. Пусть гомеоморфное отображение круга K на T дается преобразованием B ; обратное преобразование обозначим через B^{-1} .

Преобразование $B^{-1}FB$ преобразует, очевидно, круг K в себя, и притом непрерывно. В силу теоремы 10.1 найдется такая точка $M_0 \in K$, что $B^{-1}FB(M_0) = M_0$. Но это значит, что точка $B(M_0) \in T$ остается неподвижной при применении преобразования F .

Теорема доказана.

Множества, гомеоморфные кругу, — это замкнутые односвязные области $\bar{\Omega}$, граница Γ которых является жордановой кривой.

Рассмотрим систему уравнений вида

$$x = P(x, y), \quad y = Q(x, y), \quad (10.2)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны при всех вещественных x, y . Определим преобразование F плоскости в себя равенством

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)). \quad (10.3)$$

Тогда система (10.2) равносильна векторному уравнению

$$M = F(M) \quad (10.4)$$

и разрешимость системы (10.2) равносильна существованию у преобразования F неподвижных точек. Поэтому из теорем 10.1 и 10.2 можно получить различные признаки разрешимости системы (10.2).

Пусть, например, функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ ограничены:

$$|P(x, y)|, |Q(x, y)| \leq c_0 \quad (-\infty < x, y < \infty). \quad (10.5)$$

Тогда круг $x^2 + y^2 \leq 2c_0^2$ при преобразовании (10.3) переходит в себя. Из теоремы 10.1 вытекает существование неподвижной точки у преобразования (10.3). Таким образом, система (10.2) имеет по крайней мере одно решение, если выполнено условие (10.5).

Упражнение 10.2. Доказать, что система (10.2) имеет по крайней мере одно решение, если

- 1) $\lim_{|x|+|y| \rightarrow \infty} \frac{P(x, y)}{|x| + |y|} = \lim_{|x|+|y| \rightarrow \infty} \frac{Q(x, y)}{|x| + |y|} = 0.$
- 2) $\limsup_{|x|+|y| \rightarrow \infty} \frac{|P(x, y)| + |Q(x, y)|}{|x| + |y|} < 1.$

10.2. Основная теорема алгебры. Рассмотрим многочлен

$$f_0(z) = z^n + a_1^0 z^{n-1} + \dots + a_n^0 \quad (10.6)$$

(с комплексными коэффициентами) в комплексной плоскости. Пусть

$$R > |a_1^0| + \dots + |a_n^0| + 1.$$

Тогда на окружности $|z| = R$ выполняется неравенство

$$|f(z) - z^n| \leq |a_1^0|R^{n-1} + |a_2^0|R^{n-2} + \dots + |a_n^0| < R^n = |z^n|.$$

Это неравенство в силу теоремы 4.6 означает, что вращение поля $f_0(z)$ на окружности $|z| = R$ равно вращению поля z^n , то есть равно n (в силу теоремы 9.1). Из теоремы 3.1 вытекает, что поле $f(z)$ по крайней мере в одной точке обращается в нуль.

Мы доказали, что *каждое алгебраическое уравнение*

$$z^n + a_1^0 z^{n-1} + \dots + a_n^0 = 0 \quad (10.7)$$

имеет по крайней мере одно решение. Этот факт составляет содержание так называемой *основной теоремы алгебры.*

Индекс каждого нуля функции (10.6) равен его порядку (теорема 9.2). Поэтому сумма порядков нулей всех корней уравнения (10.7) n -ой степени равна n . Этот факт также играет важную роль в алгебре многочленов.

Пусть z_1, z_2, \dots, z_k — все различные корни уравнения (10.7), а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — их кратности. Пусть ε_0 — заданное положительное число, которое мы будем считать меньшим, чем половина наименьшего модуля разности $|z_i - z_j|$ ($i \neq j$). Через S_i обозначим окружность радиуса ε_0 с центром в z_i ($i = 1, \dots, k$), а через K_i — ограниченный ею круг (см. рис. 10.3). Пусть все эти круги лежат в части комплексной плоскости, выделенной неравенством $|z| \leq R$; без ограничения общности можно считать, что $R > 1$.

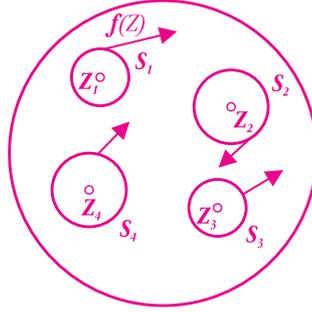


Рис. 10.3

Обозначим наименьшее значение $|f_0(z)|$ на окружностях S_i через c_0 и положим

$$\delta_0 = \frac{c_0}{nR^{n-1}}.$$

Рассмотрим наряду с уравнением (10.7) возмущенное уравнение

$$f_1(z) = z^n + (a_1^0 + \Delta a_1)z^{n-1} + \dots + (a_n^0 + \Delta a_n) = 0 \quad (10.8)$$

и предположим, что возмущения Δa_i коэффициентов a_i^0 удовлетворяют неравенствам

$$|\Delta a_i| < \delta_0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (10.9)$$

Тогда во всех точках каждой окружности S_i ($i = 1, \dots, k$) будет выполнено неравенство

$$\begin{aligned} |f_1(z) - f_0(z)| &= |\Delta a_1 \cdot z^{n-1} + \Delta a_2 \cdot z^{n-2} + \dots + \Delta a_n| \leq \\ &\leq \delta_0(R^{n-1} + R^{n-2} + \dots + 1) < n\delta_0 R^{n-1} = c_0 \leq |f_0(z)|. \end{aligned}$$

Из теоремы 4.3 следует тогда, что поля $f_1(z)$ и $f_0(z)$ имеют на каждой окружности S_i одинаковое вращение.

Вращение поля $f_0(z)$ на окружности S_i равно кратности α_i корня z_i . Поэтому и поле $f_1(z)$ имеет вращение α_i . Отсюда вытекает, что уравнение (10.8) в круге K_i имеет ровно α_i корней, если учитывать их кратность. Так как $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = n$, то вне кругов K_i ($i = 1, \dots, k$) уравнение (10.8) корней не имеет.

Мы доказали, что корни алгебраического уравнения являются непрерывными функциями коэффициентов.

Рассмотрим многочлен

$$f(z, \lambda) = a_0(\lambda)z^n + a_1(\lambda)z^{n-1} + \dots + a_{n-1}(\lambda)z + a_n(\lambda)$$

с коэффициентами, являющимися непрерывными функциями вещественного параметра λ , $\alpha \leq \lambda \leq \beta$. Допустим, что $a_0(\lambda) \neq 0$ при $\alpha \leq \lambda < \beta$ и

$$a_0(\beta) = a_1(\beta) = \dots = a_{r-1}(\beta) = 0, \quad a_r(\beta) \neq 0.$$

Из проведенных выше рассуждений вытекает, что корни уравнения

$$f(z, \lambda) = 0$$

являются непрерывными функциями параметра λ при $\alpha \leq \lambda < \beta$. Посмотрим, как меняются корни при $\lambda \rightarrow \beta$.

Обозначим через z_1, \dots, z_m корни “предельного” уравнения

$$f(z, \beta) = a_r(\beta)z^{n-r} + a_{r+1}(\beta)z^{n-r-1} + \dots + a_n(\beta) = 0$$

и через $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — их кратности.

Пусть ε и R — заданные положительные числа. Обозначим через S_i ($i = 1, \dots, m$) окружности $|z - z_i| = \varepsilon$ и через S_0 окружность $|z| = R$. При достаточно малых ε и достаточно большом R окружности S_1, \dots, S_m не пересекаются и лежат внутри S_0 . Из непрерывности коэффициентов $a_i(\lambda)$ вытекает, что при достаточно близких к β значениях λ поля $f(z; \lambda)$ на окружностях S_0, S_1, \dots, S_m гомотопны полю $f(z; \beta)$. Поэтому в каждом круге S_i ($i = 1, \dots, m$) при близких к β значениях λ расположено ровно α_i корней уравнения $f(z; \beta) = 0$, а r корней расположены вне круга S_0 .

Таким образом, r корней алгебраического уравнения “уходят в бесконечность”, если коэффициенты при r старших степенях переменной z обращаются в нуль. Остальные $n-r$ корней переходят в корни предельного “вырожденного” уравнения.

10.3. О нулях и полюсах аналитических функций. В § 9 было показано, что индекс каждого нуля аналитической функции равен его порядку, а индекс полюса равен его порядку, взятому со знаком минус.

Через $N_1(f; \Omega)$ обозначим число нулей функции $f(z)$ в области Ω , а через $N_2(f; \Omega)$ — число полюсов; при этом каждый нуль и каждый полюс считаются столько раз, каков их порядок. Если полюс считать нулем отрицательного порядка, то разность $N_1(f; \Omega) - N_2(f; \Omega)$ естественно назвать *алгебраическим числом нулей*.

Допустим, что аналитическая функция $f(z)$ имеет в области Ω конечное число нулей и конечное число полюсов и непрерывна на ограниченной замкнутой области $\bar{\Omega}$ во всех точках, кроме указанных полюсов, причем на границе Γ области Ω функция $f(z)$ не имеет нулей. Вращение поля $f(z)$ на Γ можно определить как деленное на 2π полное приращение аргумента функции $f(z)$ при обходе точкой z контура Γ в положительном направлении. Пусть начальное значение $\arg f(z)$ равно ϕ_0 , а его значение после полного оборота равно ϕ_1 . Тогда теорему об алгебраическом числе особых точек можно формулировать в виде равенства

$$N_1(f; \Omega) - N_2(f; \Omega) = \frac{1}{2\pi}(\phi_1 - \phi_0). \quad (10.10)$$

Это соотношение в теории аналитических функций называется *принципом аргумента*.

Допустим, что аналитическая на Ω функция $g(z)$ удовлетворяет условию

$$|g(z)| < |f(z)| \quad (z \in \Gamma). \quad (10.11)$$

Тогда из теоремы 4.3 вытекает, что вращения полей $f(z)$ и $f(z) + g(z)$ на Γ одинаковы. Из равенства (10.10) вытекает тогда, что алгебраическое число нулей функций $f(z)$ и $f(z) + g(z)$ в области одинаково.

В частности, если $f(z)$ и $g(z)$ в области Ω не имеют полюсов, то из неравенства (10.11) вытекает, что функции $f(z)$ и $f(z) + g(z)$ в области Ω имеют одинаковое число нулей (учитывая их кратность). Это утверждение в теории аналитических функций называется (как и теорема 4.3) *теоремой Руше*.

Упражнение 10.3. Пусть последовательность $f_n(z)$ аналитических функций равномерно в замкнутой области Ω сходится к $f(z)$, отличной от тождественного нуля. Пусть $f(z)$ на границе Γ области Ω не обращается в нуль.

Докажите теорему Гурвица о существовании такого номера n_0 , что все функции $f_n(z)$ при $n \geq n_0$ имеют в Ω одинаковое число нулей.

Вернемся к формуле (10.10). Предположим, что граница Γ области Ω является замкнутой кусочно гладкой кривой. Модуль аналитической на Ω функции $f(z)$ на Γ меняется непрерывно и в нуль не обращается. Поэтому функция $\ln |f(z)|$ при полном обходе кривой не получает приращения. Следовательно,

$$\oint_{\Gamma} d \ln |f(z)| = 0.$$

Вращение γ поля $f(z)$ на Γ равно

$$\gamma = \frac{1}{2\pi}(\phi_1 - \phi_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d \arg f(z) = \frac{2}{2\pi i} \oint_{\Gamma} d \ln e^{i \arg f(z)}.$$

Объединяя последние два равенства, получим

$$\gamma = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} d \ln |f(z)| e^{i \arg f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} d \ln f(z),$$

откуда

$$\gamma = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (10.12)$$

Это выражение называется *логарифмическим вычетом* функций $f(z)$ относительно Γ . Основная теорема о логарифмическом вычете вытекает из (10.10):

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_1(f; \Omega) - N_2(f; \Omega). \quad (10.13)$$

Упражнение 10.4. Распространить формулу (10.13) на случай многосвязной области.

10.4. Системы двух и трех уравнений. Рассмотрим систему

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0, \quad (10.14)$$

где функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны по совокупности переменных в замкнутой области $\bar{\Omega}$ с границей Γ . Рассмотрим на $\bar{\Omega}$ непрерывное векторное поле

$$\Phi(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)). \quad (10.15)$$

Если вращение этого поля на Γ окажется отличным от нуля, то отсюда будет вытекать существование в области Ω по крайней мере одного решения системы (10.14). Если вращение окажется равным нулю, то можно пытаться находить под-области $\Omega_1 \subseteq \Omega$, на границах которых вращение поля (10.15) отлично от нуля.

Вращение на Γ во многих случаях удастся оценить по общим характеристикам функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Подобные примеры были разобраны выше, другие примеры будут приведены в следующем пункте. Для вычисления вращений могут быть применены, как уже указывалось, и численные методы — для этого достаточно представить вращение формулой Пуанкаре и провести вычисления так, чтобы ошибка была меньше, чем 0,5; округляя полученный результат до целых единиц, мы получим точное значение вращения.

Последнее замечание может быть применено для оценки погрешности найденного приближенного решения (x_0, y_0) системы (10.14). Если окажется, что на окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ вращение поля (10.15) отлично от нуля, то это будет означать, что найденное приближенное решение находится от некоторого точного решения системы на расстоянии меньшем, чем ρ .

Теорема об алгебраическом числе особых точек векторного поля может быть применена и для оценки числа решений. Пусть, например, одно решение системы (10.14) известно и известен его индекс. Если этот индекс окажется отличным от вращения поля (10.15) на Γ , то отсюда будет вытекать существование других решений.

В следующем пункте будет приведен пример векторного поля, особые точки которого могут иметь только один вполне определенный индекс. Для таких полей Φ вращение на Γ полностью определяет число решений системы.

Еще один принцип¹⁵ доказательства существования решений основан на теореме о негомотопности векторных полей с разным вращением.

Рассмотрим систему трех уравнений

$$P(x, y, t) = 0, \quad Q(x, y, t) = 0, \quad R(x, y) = 0, \quad (10.16)$$

где функции P , Q и R непрерывны. Третье уравнение — это уравнение некоторой плоской линии; допустим, что эта линия содержит замкнутую жорданову кривую Γ . На кривой Γ рассмотрим семейство $\Phi(M; t)$ векторных полей

$$\Phi(M; t) \equiv \Phi(x, y, t) = (P(x, y, t), Q(x, y, t)) \quad (10.17)$$

и допустим, что эти поля при двух значениях t_1 и t_2 переменной t , рассматриваемой как параметр, имеют на Γ разное вращение. Тогда при некотором $t \in (t_1, t_2)$ поле (10.17) на кривой Γ имеет нулевой вектор, так как в противном случае поля $\Phi(M; t_1)$ и $\Phi(M; t_2)$ были бы гомотопны на Γ и имели бы одинаковое вращение. Нуль поля (10.17) на Γ определяет решение системы (10.16).

¹⁵Важные применения имеет аналог этого принципа для уравнений в бесконечномерных пространствах (см. **М.А. Красносельский**, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*, Физматгиз, 1956).

Пусть, например, задана система

$$2x + ty + \sin t(x + y) = 0, \quad x - 2y + \cos t(x + y) + t = 0, \quad x^2 + y^2 = 1. \quad (10.18)$$

По описанной выше схеме нужно на единичной окружности Γ рассмотреть поля

$$\Phi(x, y, t) = (2x + ty + \sin t(x + y), x - 2y + \cos t(x + y) + t).$$

Вращение поля

$$\Phi(x, y, 0) = (2x, x - 2y + 1)$$

на Γ равно -1 , так как это поле имеет единственную особую точку $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, лежащую внутри Γ , индекс которой равен -1 . С другой стороны, при больших t вращение полей $\Phi(x, y, t)$ на Γ равно нулю, так как вторая компонента не принимает отрицательных значений. Значит, система (10.18) имеет по крайней мере одно решение.

10.5. Системы с полилинейной главной частью. В этом пункте через $P_k(x, y)$ и $Q_k(x, y)$ мы будем обозначать однородные многочлены степени k от переменных x и y . Таким образом, $P_0(x, y)$ и $Q_0(x, y)$ — постоянные числа, $P_1(x, y)$ и $Q_1(x, y)$ — линейные выражения и т.д.

Рассмотрим систему

$$\sum_{i=0}^n P_i(x, y) = 0, \quad \sum_{i=0}^n Q_i(x, y) = 0 \quad (10.19)$$

и допустим, что полилинейное поле

$$\Phi_n(x, y) = (P_n(x, y), Q_n(x, y)) \quad (10.20)$$

не вырождено и индекс γ его нулевой особой точки отличен от нуля (см. § 8). Нетрудно проверить, что на окружностях $x^2 + y^2 = R^2$ большого радиуса R поле (10.20) является главной частью поля

$$\Phi(x, y) = \left(\sum_{i=0}^n P_i(x, y), \sum_{i=0}^n Q_i(x, y) \right). \quad (10.21)$$

Поэтому вращение поля (10.21) на этих окружностях совпадает с вращением поля (10.20) и равно, следовательно, γ . Отсюда вытекает существование нуля у поля (10.21), то есть, вытекает разрешимость системы (10.19).

Предположим дополнительно, что $|\gamma| = n$. Как было показано в § 8, это значит, что каждое из уравнений

$$P_n(x, y) = 0, \quad Q_n(x, y) = 0 \quad (10.22)$$

определяет семейство ровно из n различных прямых, причем прямые семейств перемежаются.

Рассмотрим систему (10.19) частного вида

$$P_n(x, y) = a, \quad Q_n(x, y) = b, \quad (10.23)$$

где $|a| + |b| > 0$. Из доказанной выше теоремы вытекает, что эта система имеет по крайней мере одно вещественное решение. Покажем, что таких решений ровно n . Для доказательства покажем, что определитель

$$\Delta(x, y) = \frac{D(P_n, Q_n)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} P_n(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} P_n(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x} Q_n(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} Q_n(x, y) \end{vmatrix} \quad (10.24)$$

обращается в нуль лишь при $x = y = 0$. Отсюда будет вытекать, что во всех других точках определитель $\Delta(x, y)$ принимает значения одного знака. Из теоремы 6.2 тогда будет следовать, что индексы всех особых точек поля $(P_n(x, y) - a, Q_n(x, y) - b)$ одинаковы и по абсолютной величине равны 1. Остается воспользоваться теоремой об алгебраическом числе особых точек.

По теореме Эйлера однородные функции $P_n(x, y)$ и $Q_n(x, y)$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} P_n(x, y) &= \frac{x}{n} \frac{\partial}{\partial x} P_n(x, y) + \frac{y}{n} \frac{\partial}{\partial y} P_n(x, y), \\ Q_n(x, y) &= \frac{x}{n} \frac{\partial}{\partial x} Q_n(x, y) + \frac{y}{n} \frac{\partial}{\partial y} Q_n(x, y) \end{aligned} \quad (10.25)$$

Поэтому при $x \neq 0$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} P_n(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} P_n(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x} Q_n(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} Q_n(x, y) \end{vmatrix} = \\ &= \frac{x}{n} \begin{vmatrix} P_n(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} P_n(x, y) \\ Q_n(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} Q_n(x, y) \end{vmatrix} + nx^{2n-2} \begin{vmatrix} P_n\left(1, \frac{y}{x}\right) & \frac{\partial}{\partial y} P_n\left(1, \frac{y}{x}\right) \\ Q_n\left(1, \frac{y}{x}\right) & \frac{\partial}{\partial y} Q_n\left(1, \frac{y}{x}\right) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Правая часть, как было показано при доказательстве теоремы 8.2, имеет тот же знак, что и вращение поля $(P_n(x, y), Q_n(x, y))$ на единичной окружности.

Для точек прямой $x = 0$ проведенные выше рассуждения нужно дополнить следующим соображением. Определитель (10.24) не изменится, если переменные x, y подвергнуть линейному преобразованию с определителем, равным 1. При таком преобразовании векторное поле останется n -линейным; индекс нулевой особой точки не изменится. Прямая $x = 0$ перестанет быть осью координат, и по уже доказанному на точках этой прямой определитель (10.23) будет иметь тот же знак, что и вращение поля на единичной окружности.

Упражнение 10.5. Сколько решений имеет система

$$4x^2y - y^3 - 2 = 0, \quad 3x^3 + x^2y - 3xy^2 - y^3 + 3 = 0?$$

10.6. Существование неявной функции. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} f(x, y, z_1, \dots, z_n) &= 0, \\ g(x, y, z_1, \dots, z_n) &= 0. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Предположим, что

$$f(x_0, y_0, z_1^0, \dots, z_n^0) = g(x_0, y_0, z_1^0, \dots, z_n^0) = 0, \quad (10.27)$$

и поставим вопрос о существовании неявных функций

$$\begin{aligned} x &= \phi(z_1, \dots, z_n), \\ y &= \psi(z_1, \dots, z_n), \end{aligned} \quad (10.28)$$

определяемых уравнениями (10.26) при близких к z_1^0, \dots, z_n^0 значениях z_1, \dots, z_n и удовлетворяющих условию

$$\phi(z_1^0, \dots, z_n^0) = x_0, \quad \psi(z_1^0, \dots, z_n^0) = y_0. \quad (10.29)$$

Напомним, что функции (10.28) называются неявными функциями, определяемыми уравнениями (10.26), если

$$\begin{aligned} f(\phi(z_1, \dots, z_n), \psi(z_1, \dots, z_n), z_1, \dots, z_n) &\equiv 0, \\ g(\phi(z_1, \dots, z_n), \psi(z_1, \dots, z_n), z_1, \dots, z_n) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (10.30)$$

Относительно функций $f(x, y, z_1, \dots, z_n)$ и $g(x, y, z_1, \dots, z_n)$ всюду ниже предполагается, что они непрерывны по совокупности всех $n + 2$ переменных в окрестности точки $(x_0, y_0, z_1^0, \dots, z_n^0)$.

Допустим вначале, что функции $f(x, y, z_1, \dots, z_n)$ и $g(x, y, z_1, \dots, z_n)$ дифференцируемы в одной точке (x_0, y_0) , причем якобиан

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f'_x(x_0, y_0, z_1^0, \dots, z_n^0) & f'_y(x_0, y_0, z_1^0, \dots, z_n^0) \\ g'_x(x_0, y_0, z_1^0, \dots, z_n^0) & g'_y(x_0, y_0, z_1^0, \dots, z_n^0) \end{vmatrix} \quad (10.31)$$

отличен от нуля. Рассмотрим тогда векторное поле

$$\Phi_0(x, y) = (f(x, y, z_1^0, \dots, z_n^0), g(x, y, z_1^0, \dots, z_n^0)). \quad (10.32)$$

Точка (x_0, y_0) будет изолированной особой точкой этого поля, индекс которой (см. § 6) γ_0 определяется равенством

$$\gamma_0 = \text{sign } \Delta(x_0, y_0) \quad (10.33)$$

и, следовательно, отличен от нуля. Обозначим через S окружность с центром в точке (x_0, y_0) , на которой поле (10.32) не имеет нулевых векторов и внутри которой нет отличных от (x_0, y_0) особых точек поля. Из непрерывности функций $f(x, y, z_1, \dots, z_n)$ и $g(x, y, z_1, \dots, z_n)$ вытекает существование такого положительного δ_0 , что при фиксированных z_1, \dots, z_n , удовлетворяющих неравенствам

$$|z_1 - z_1^0| < \delta_0, \dots, |z_n - z_n^0| < \delta_0, \quad (10.34)$$

векторное поле

$$\Phi_{[z_1, \dots, z_n]}(x, y) = (f(x, y, z_1, \dots, z_n), g(x, y, z_1, \dots, z_n)) \quad (10.35)$$

на S гомотопно полю (10.32). Но тогда вращение поля (10.35) на S равно γ_0 и отлично от нуля. В силу теоремы об алгебраическом числе особых точек поле (10.35) имеет внутри окружности S по крайней мере одну особую точку, координаты которой и являются неявными функциями (10.28). Итак, мы доказали существование неявной функции в области, выделенной неравенствами (10.34).

Определенная выше неявная функция могла оказаться неоднозначной, так как поле (10.35) может внутри окружности S иметь несколько особых точек и координаты каждой из этих особых точек могут быть объявлены значениями неявной функции. Неявная функция была бы однозначной в области (10.34), если бы у поля (10.35) внутри S была единственная особая точка.

Предположим дополнительно, что в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, z_1^0, \dots, z_n^0)$ существуют непрерывные частные производные

$$\begin{pmatrix} f'_x(x, y, z_1, \dots, z_n), & f'_y(x, y, z_1, \dots, z_n) \\ g'_x(x, y, z_1, \dots, z_n), & g'_y(x, y, z_1, \dots, z_n) \end{pmatrix}. \quad (10.36)$$

Тогда в некоторой окрестности U этой точки якобиан

$$\Delta_{(z_1, \dots, z_n)}(x, y) = \begin{vmatrix} f'_x(x, y, z_1, \dots, z_n) & f'_y(x, y, z_1, \dots, z_n) \\ g'_x(x, y, z_1, \dots, z_n) & g'_y(x, y, z_1, \dots, z_n) \end{vmatrix} \quad (10.37)$$

отличен от нуля и принимает значения того же знака, что и определитель (10.31). Без ограничения общности можно считать, что окрестность U состоит из точек, координаты x и y которых определяют точку плоскости, лежащую внутри окружности S , а остальные координаты которых удовлетворяют неравенствам (10.34). Отличие от нуля определителя (10.37) означает (см. § 6), что особые точки полей (10.35), лежащие внутри S , изолированы. Их индекс равен знаку определителя (10.37). Таким образом, все особые точки поля (10.35) имеют одинаковый индекс, совпадающий с вращением поля на граничной окружности. Значит, особая точка единственна.

Мы показали, что существование и непрерывность производных (10.36) в дополнении к предположению об отличии от нуля определителя (10.31) являются достаточными условиями существования в окрестности точки (z_1^0, \dots, z_n^0) однозначной неявной функции. Именно при этих условиях теорема существования неявной функции обычно доказывается в курсах математического анализа.

Упражнение 10.6.

1) Докажите, что из отличия от нуля определителя (10.31) вытекает, что неявные функции непрерывны в точке (z_1^0, \dots, z_n^0) .

2) Пусть известно, что в окрестности точки (z_1^0, \dots, z_n^0) неявные функции определяются однозначно. Докажите, что непрерывность неявных функций вытекает из непрерывности функций $f(x, y, z_1, \dots, z_n)$ и $g(x, y, z_1, \dots, z_n)$.

В случае, когда определитель (10.31) равен нулю, вопрос о существовании неявной функции становится существенно более сложным. Мы отметим здесь лишь одно очевидное утверждение.

Допустим, что особая точка (x_0, y_0) поля (10.32) изолирована и индекс ее отличен от нуля. Тогда из проведенных выше рассуждений вытекает существование неявной функции. Пусть, например,

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0, z_1^0, \dots, z_n^0) &= f'_y(x_0, y_0, z_1^0, \dots, z_n^0) = \\ &= g'_x(x_0, y_0, z_1^0, \dots, z_n^0) = g'_y(x_0, y_0, z_1^0, \dots, z_n^0) = 0. \end{aligned} \quad (10.38)$$

Тогда неравенство

$$\left| \begin{array}{cc} \bar{f}''_{xx} & \bar{f}''_{xy} \\ \bar{g}''_{xx} & \bar{g}''_{xy} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} \bar{f}''_{xy} & \bar{f}''_{yy} \\ \bar{g}''_{xy} & \bar{g}''_{yy} \end{array} \right| > \left| \begin{array}{cc} \bar{f}''_{xx} & \bar{f}''_{yy} \\ \bar{g}''_{xx} & \bar{g}''_{yy} \end{array} \right|^2, \quad (10.39)$$

где черта сверху означает, что значение второй производной взято в точке $(x_0, y_0, z_1^0, \dots, z_n^0)$, является достаточным условием существования неявной функции. Действительно, из условия (10.39) вытекает, что индекс особой точки (x_0, y_0) билинейного поля

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= (\bar{f}''_{xx}(x - x_0)^2 + 2\bar{f}''_{xy}(x - x_0)(y - y_0) + \bar{f}''_{yy}(y - y_0)^2, \\ &\quad \bar{g}''_{xx}(x - x_0)^2 + 2\bar{g}''_{xy}(x - x_0)(y - y_0) + \bar{g}''_{yy}(y - y_0)^2) \end{aligned} \quad (10.40)$$

отличен от нуля (см. теорему 8.4). Но тогда (в силу теоремы 8.1) индекс особой точки (x_0, y_0) поля (10.32) отличен от нуля, откуда и вытекает наше утверждение.

Упражнение 10.7. Пусть функции $f(x, y, z_1, \dots, z_n)$ и $g(x, y, z_1, \dots, z_n)$ трижды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $(x_0, y_0, z_1^0, \dots, z_n^0)$, в которой выполнены равенства (10.27). Пусть выполнены равенства (10.38) и равенства

$$\bar{f}''_{xx} = \bar{f}''_{xy} = \bar{f}''_{yy} = \bar{g}''_{xx} = \bar{g}''_{xy} = \bar{g}''_{yy} = 0.$$

Найти, при каких соотношениях между третьими производными (в точке $(x_0, y_0, z_1^0, \dots, z_n^0)$) существует неявная функция, определяемая уравнениями (10.26).

10.7. О расположении корней многочлена. Рассмотрим многочлен

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n. \quad (10.41)$$

Нас будет интересовать известная и важная во многих приложениях задача¹⁶ об определении количества σ корней многочлена (10.41), имеющих отрицательную вещественную часть. При этом каждый корень будем считать столько раз, какова его кратность.

Обозначим через $\Psi(x, y)$ векторное поле, определенное многочленом (10.41):

$$\Psi(x, y) = (\operatorname{Re} f(x + iy), \operatorname{Im} f(x + iy)). \quad (10.42)$$

¹⁶См. **Н.Г. Чеботарев** и **Н.Н. Мейман**, *Проблема Рауса – Гурвица для многочленов и целых функций*, Труды Матем. ин-та АН СССР **26**, 1949. По существу, методом, основанным на использовании вращения, изучал расположение корней многочленов еще Коши (см., например, **Д.А. Граве**, *Элементы высшей алгебры*, Киев, 1911).

Допустим, что уравнение $f(z) = 0$ не имеет корней на мнимой оси. Тогда интересующая нас сумма σ кратностей корней, лежащих в левой полуплоскости, будет равна (в силу теорем 3.2 и 9.2) вращению γ поля (10.42) на границе Γ полукруга (см. рис. 10.4), выделенного неравенствами

$$x^2 + y^2 \leq R^2, \quad x \leq 0,$$

если только радиус R выбран достаточно большим. Граница Γ состоит из двух частей: полуокружности Γ_1 и отрезка Γ_2 оси ординат (см. рис. 10.4).

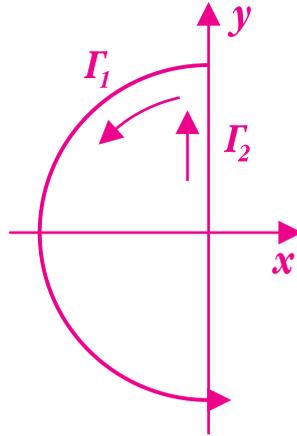


Рис. 10.4

При больших R векторы поля (10.42) на полуокружности Γ_1 близки по направлению к векторам поля

$$\Psi_1(x, y) = (\operatorname{Re} a_k z^k, \operatorname{Im} a_k z^k). \quad (10.43)$$

Вращение на Γ_1 поля (10.43) равно $\frac{1}{2}k$. Поэтому вращение γ_1 поля (10.42) на Γ_1 определится равенством

$$\gamma_1 = \frac{k}{2} + \delta_1(R), \quad (10.44)$$

где

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \delta_1(R) = 0.$$

Рассмотрим теперь поле (10.42) на отрезке Γ_2 . Компоненты этого поля

$$\Psi(0, y) = (\operatorname{Re} f(iy), \operatorname{Im} f(iy)) \quad (10.45)$$

являются многочленами с вещественными коэффициентами. Положим

$$T_0(y) = \operatorname{Re} f(iy), \quad T_1(y) = \operatorname{Im} f(iy). \quad (10.46)$$

Без ограничения общности можно считать, что степень m многочлена $T_0(y)$ не ниже степени n многочлена $T_1(y)$ (в противном случае мы перешли бы от рассмотрения многочлена $f(z)$ к рассмотрению $if(z)$ с теми же корнями).

Построим по многочленам (10.46) обобщенный ряд Штурма (см. § 8, формулы (8.35) и (8.36))

$$T_0(y), T_1(y), \dots, T_l(y). \quad (10.47)$$

При доказательстве теоремы (8.5) было установлено, что вращение γ_0 поля

$$\Phi(x, y) = \left(x^m T_0 \left(\frac{y}{x} \right), x^n T_1 \left(\frac{y}{x} \right) \right) \quad (10.48)$$

на полуокружности $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$ определяется формулой

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} (s(+\infty) - s(-\infty)),$$

где $s(-\infty)$ — количество перемен знака в ряде чисел (10.47) при отрицательных и больших по абсолютной величине y , а $s(+\infty)$ — количество перемен знака в ряде (10.47) при больших положительных y . Но вращение поля (10.48) на полуокружности совпадает с вращением поля (10.45) на мнимой оси, так как вектор поля (10.48) в точке (x, y) полуокружности не направлен противоположно вектору поля (10.45) в точке $\left(0, \frac{y}{x}\right)$ мнимой оси, причем векторы поля (10.45) при неограниченном возрастании y (к $+\infty$ и $-\infty$) сходятся по направлению к векторам поля (10.48) в точках $(0, 1)$ и $(0, -1)$. Поэтому вращение γ_2 поля (10.45) или, что то же, поля (10.42) на отрезке Γ_2 оси ординат определится равенством

$$\gamma_2 = \frac{s(\infty) - s(-\infty)}{2} + \delta_2(R), \quad (10.49)$$

где

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \delta_2(R) = 0.$$

Из равенств (10.44) и (10.49) и из равенства

$$\sigma = \gamma_1 + \gamma_2$$

вытекает, что

$$\sigma = \frac{k + s(\infty) - s(-\infty)}{2}. \quad (10.50)$$

Упражнение 10.8. Допустим, что многочлен (10.41) имеет на мнимой оси корни, сумма кратностей которых равна κ . Докажите, что в этом случае

$$\sigma = \frac{k - \kappa + s(\infty) - s(-\infty)}{2}.$$

Упражнение 10.9. Определить сумму кратностей корней, лежащих в левой полуплоскости, для следующих многочленов:

- 1) $z^3 + iz^2 - 2iz + 4 + 2i$,
- 2) $z^4 + 7z^3 + 18z^2 + 22z + 10$.

10.8. Четность степени эллиптических многочленов. Рассмотрим однородный многочлен степени m :

$$P(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^k a_i z_1^{\alpha_1^{(i)}} z_2^{\alpha_2^{(i)}} \dots z_n^{\alpha_n^{(i)}} \quad (10.51)$$

с n переменными z_1, z_2, \dots, z_n и с комплексными коэффициентами; однородность, как обычно, означает, что

$$\alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)} + \dots + \alpha_n^{(i)} = m \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Пусть многочлен (10.51) обладает тем свойством, что из равенства

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

и из вещественности x_1, x_2, \dots, x_n вытекают равенства

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Примерами могут служить многочлены

$$z_1 + iz_2, \quad z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2.$$

Покажем, что m четно, если $n > 2$. Это утверждение используется в теории эллиптических дифференциальных операторов.

Доказательство проведем от противного. Допустим, что m нечетно. Рассмотрим тогда в плоскости (x_1, x_2) векторное поле

$$\Phi(x_1, x_2) = (\operatorname{Re} P(x_1, x_2, 0, \dots, 0), \operatorname{Im} P(x_1, x_2, 0, \dots, 0)).$$

Из сделанных предположений вытекает, что оно имеет лишь одну нулевую особую точку. Индекс этой особой точки отличен от нуля, так как поле нечетно и его вращение на любой окружности $x_1^2 + x_2^2 = \rho^2$ в силу теоремы 2.2 нечетно. Из теоремы 4.10 вытекает, что при малом ненулевом вещественном x_3^0 векторное поле

$$\Phi_1(x_1, x_2) = (\operatorname{Re} P(x_1, x_2, x_3^0, 0, \dots, 0), \operatorname{Im} P(x_1, x_2, x_3^0, 0, \dots, 0))$$

имеет особую точку (x_1^0, x_2^0) . Это значит, что

$$P(x_1^0, x_2^0, x_3^0, 0, \dots, 0) = 0,$$

и мы пришли к противоречию.

§ 11. Векторные поля градиентов функции

11.1. Потенциальные системы уравнений. Система уравнений

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0 \quad (11.1)$$

называется *потенциальной*, если существует такая функция $U(x, y)$, что

$$P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}U(x, y), \quad Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}U(x, y). \quad (11.2)$$

Функцию $U(x, y)$ называют *потенциалом* системы (11.1).

В дальнейшем предполагается, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны по совокупности переменных не только в рассматриваемых замкнутых областях $\bar{\Omega}$, но и в некоторой окрестности $\bar{\Omega}$.

Если бы мы предполагали дополнительно, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы, то условие потенциальности системы в односвязной области записалось бы, как известно, равенством

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y).$$

Потенциал $U(x, y)$ в односвязной области Ω может быть восстановлен (с точностью до произвольной постоянной) при помощи формулы

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

где криволинейный интеграл берется по произвольной кривой, соединяющей фиксированную точку (x_0, y_0) с переменной точкой (x, y) (см. рис. 11.1).

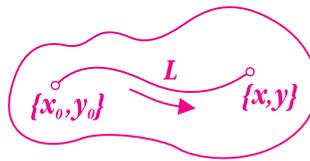


Рис. 11.1

Решения системы (11.1) называют *критическими точками* потенциала $U(x, y)$. Иначе говоря, критические точки потенциала — это особые точки векторного поля

$$\text{grad } U(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)). \quad (11.3)$$

В настоящем параграфе мы показываем, как по общим характеристикам значений функции $U(x, y)$ на границе области может быть оценено вращение поля (11.3).

Следовательно, по общим характеристикам поведения функции $U(x, y)$ на границе области Ω может быть сделано заключение о существовании в области Ω по крайней мере одной критической точки функции $U(x, y)$.

Для функций одной переменной подобная теорема хорошо известна — это теорема Ролля о существовании нуля у производной функции, которая на концах некоторого отрезка принимает одинаковые значения. При переходе к двумерным областям теорема Ролля может быть обобщена нетривиальным способом.

Вектор поля (11.3) называется *градиентом* функции $U(x, y)$. В связи с этим поле (11.3) мы будем ниже называть *полем градиентов*. Вектор-градиент в каждой точке направлен в сторону быстрейшего возрастания функции.

Линии, на которых $U(x, y)$ принимает постоянное значение, называются *линиями уровня* функции $U(x, y)$. Таким образом, линии уровня задаются уравнениями

$$U(x, y) = \text{const.} \quad (11.4)$$

Допустим, что точка (x_0, y_0) не критическая для функции $U(x, y)$. Рассмотрим линию уровня

$$U(x, y) - U(x_0, y_0) = 0. \quad (11.5)$$

Из теоремы о неявной функции вытекает, что в окрестности точки (x_0, y_0) линия уровня, проходящая через точку (x_0, y_0) , — это кривая, которую можно рассматривать как график некоторой функции $y = \phi(x)$ (если $Q(x_0, y_0) \neq 0$) или функции $x = \psi(y)$ (если $P(x_0, y_0) \neq 0$). Мы показали, что линия уровня, не содержащая критических точек, — это линия без пересечений и самокасаний.

Отсюда, в частности, вытекает, что точка (x_0, y_0) обязательно будет критической, если через нее проходит несколько дуг линии уровня, пересекающихся друг друга под некоторым углом или касающихся друг друга.

Второй важный вывод относится к ограниченным линиям уровня (лежащим в области), на которых нет критических точек. Эти линии уровня состоят из замкнутых гладких кривых.

11.2. Индекс критической точки. Дифференцируя равенство (11.4), получим

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (11.6)$$

Так как вектор (dx, dy) определяет направление касательной к линии уровня (11.4), то равенство (11.6) означает, что вектор-градиент направлен по нормали к линии уровня.

Допустим, что Γ — замкнутая линия уровня, на которой нет критических точек. Из непрерывности векторного поля градиентов вытекает, что вектор-градиенты во всех точках кривой Γ направлены по одному (внутреннему или внешнему) направлению нормали к Γ . Из теоремы 2.3 тогда следует

Лемма 11.1. *Вращение поля градиентов на кривой Γ равняется 1, если Γ обходить в положительном направлении.*

Из этой простой леммы можно получить ряд важных следствий.

В частности, из нее вытекает, что внутри каждой замкнутой линии уровня функции $U(x, y)$ есть по крайней мере одна критическая точка. Это тривиальное обобщение теоремы Ролля можно, впрочем, получить и более простым путем: если на границе Γ области Ω функция $U(x, y)$ принимает постоянное значение, то некоторая внутренняя точка области является точкой абсолютного максимума или минимума $U(x, y)$ на $\bar{\Omega}$, точки абсолютного максимума или минимума являются критическими точками.

Критические точки функции $U(x, y)$ — особые точки поля градиентов. Индекс изолированной особой точки — это, по определению, *индекс изолированной критической точки функции*. В связи с этим точку локального экстремума (минимума или максимума) будем называть *изолированной*, если в некоторой ее окрестности нет других критических точек.

Теорема 11.1. *Индекс изолированной точки экстремума равен 1.*

Доказательство. Пусть для определенности точка (x_0, y_0) — изолированная точка максимума функции. Тогда линии уровня, определяемые уравнением

$$U(x, y) = U(x_0, y_0) - \varepsilon$$

в окрестности точки (x_0, y_0) , при малых положительных ε будут замкнутыми кривыми Γ , внутри которых лежит точка (x_0, y_0) . Индекс этой критической точки равен вращению поля градиентов на кривой Γ . В силу леммы 11.1 индекс равен 1.

Теорема доказана.

Упражнение 11.1. *Вычислить индекс критической точки квадратичной формы $U(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.*

Теорема 11.2. *Пусть граница Γ области Ω состоит из ν замкнутых кривых, каждая из которых является линией уровня функции $U(x, y)$. Пусть $\nu \neq 2$.*

Тогда функция $U(x, y)$ на $\bar{\Omega}$ имеет по крайней мере одну критическую точку.

Доказательство. Допустим, что на Γ функция $U(x, y)$ не имеет критических точек.

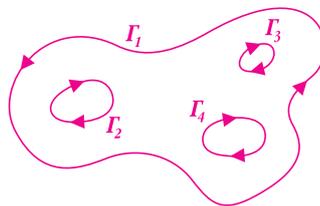


Рис. 11.2

Пусть граница Γ состоит из кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_\nu$, первая из которых — внешняя кривая (см. рис. 11.2). Из леммы 11.1 и из формулы (3.1) вытекает, что вращение поля градиентов на границе области Ω равно $2 - \nu$. Поэтому поле градиентов имеет в области Ω по крайней мере одну особую точку.

Теорема доказана.

При $\nu = 2$ утверждение теоремы неверно, как видно из примера функции $U(x, y) = x^2 + y^2$, рассматриваемой в кольце $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$.

Ниже будет указан признак существования критических точек для случая, когда граничная кривая не является линией уровня.

11.3. Относительное вращение поля. Пусть векторное поле Φ определено и не имеет особых точек на гладкой замкнутой кривой Γ , заданной уравнением

$$M(t) = (x(t), y(t)) \quad (a \leq t \leq b).$$

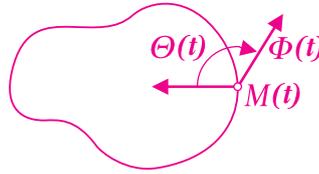


Рис. 11.3

Обозначим через $\theta_1(t)$ угол между вектором Φ в точке $M(t)$ и направлением внутренней нормали к Γ в точке $M(t)$ (см. рис. 11.3). Функция $\theta_1(t)$ по самому своему определению многозначна; мы сохраним обозначение $\theta_1(t)$ за некоторой ее непрерывной ветвью.

Приращение $\theta_1(t)$ после обхода кривой Γ , выраженное в единицах полного оборота, назовем *относительным вращением* поля Φ и обозначим через $I(\Phi; \Gamma)$. Из определения следует, что

$$I(\Phi; \Gamma) = \frac{1}{2\pi}(\theta_1(b) - \theta_1(a)). \quad (11.7)$$

Имеет место очевидное равенство

$$\theta_1(t) = \theta(t) - \theta_2(t) + \text{const},$$

где $\theta(t)$ — угловая функция поля Φ , а $\theta_2(t)$ — угловая функция поля внутренних нормалей. Поэтому относительное вращение связано с вращением $I(\Phi; \Gamma)$ поля Φ на Γ равенством

$$I(\Phi; \Gamma) = \gamma(\Phi, \Gamma) - \gamma_0,$$

где γ_0 — вращение поля внутренних нормалей. В силу теоремы 2.4 $\gamma_0 = 1$. Поэтому

$$I(\Phi; \Gamma) = \gamma(\Phi, \Gamma) - 1. \quad (11.8)$$

Упражнение 11.2. Покажите, что равенство (11.8) следует из формулы (4.11) (упражнение 4.7. 1).

В этом пункте будет описан один способ вычисления относительного вращения, а следовательно, и вращения векторного поля.

Через $\Phi(t)$ будем, как обычно, обозначать вектор поля Φ в точке $M(t) \in \Gamma$. Точку $M(t)$ нам будет удобно называть *основанием* вектора.

Вектор $\Phi(t)$ назовем *нормально входящим*, если он направлен по внутренней нормали к Γ . Аналогично определяются *нормально выходящие* векторы.

Основание каждого нормально входящего вектора можно покрыть такой открытой дугой (на кривой Γ), что замыкание ее не содержит оснований нормально выходящих векторов. Из совокупности таких дуг можно выделить конечное число непересекающихся дуг L_1, \dots, L_s , покрывающих основания всех нормально входящих векторов. Дуги L_1, \dots, L_s образуют *входящее покрытие*, порождаемое полем Φ . Одно и то же поле может порождать различные входящие покрытия, но все эти покрытия содержат основания всех нормально входящих векторов, а их замыкания не содержат ни одного основания нормально выходящего вектора. Входящее покрытие может быть пустым (если нет нормально входящих векторов), оно может совпадать со всей кривой Γ (если нет нормально выходящих векторов).

На рис. 11.4 утолщенной линией изображено одно из входящих покрытий.

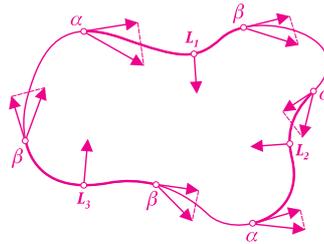


Рис. 11.4

Точку M , являющуюся концом дуги L_i , назовем *тангенциально входящей*, если проекция вектора $\Phi(M)$ на касательную (к Γ в точке M) направлена в сторону дуги L_i . Аналогично определяются *тангенциально выходящие* точки. На рис. 11.4 тангенциально входящие концы дуг L_i , обозначены буквой α , а тангенциально выходящие — буквой β .

Каждой дуге L_i входящего покрытия припишем *характеристику* $\tau(L_i)$, равную 1, если оба ее конца тангенциально входящие (на рис. 11.4 — дуга L_2); равную -1 , если оба ее конца тангенциально выходящие (на рис. 11.4 — дуга L_3); равную нулю, если один конец тангенциально входящий, а другой тангенциально выходящий (на рис. 11.4 — дуга L_1); $\tau(L_i) = 0$ и в том случае, если $L_i = \Gamma$.

Характеристику τ входящего покрытия L_1, \dots, L_s определили равенством

$$\tau = \tau(L_1) + \dots + \tau(L_s). \quad (11.9)$$

Теорема 11.3 (М. Морс). *Характеристика τ входящего покрытия равна отношению к относительному вращению поля Φ .*

Доказательство совершенно элементарно, и мы предоставляем его читателю. Заметим лишь, что для доказательства нужно проследить за изменением функции $\theta_1(t)$ (непрерывной ветви угла наклона вектора $\Phi(t)$ к вектору внутренней нормали) при переходе точки через дугу входящего покрытия.

Из теоремы 11.3 вытекает, что характеристики всех входящих покрытий, порожденных одним и тем же полем Φ , одинаковы.

Если поле Φ имеет на Γ лишь конечное число нормально входящих векторов, то вместо характеристик дуг входящего покрытия можно говорить о характеристиках самих нормально входящих векторов.

Пусть поле Φ на Γ имеет m_1 нормально входящих векторов с характеристикой 1 и m_2 с характеристикой -1 . Тогда из теоремы 11.3 вытекают равенства

$$I(\Phi; \Gamma) = m_1 - m_2 \quad (11.10)$$

и

$$\gamma(\Phi, \Gamma) = m_1 - m_2 + 1. \quad (11.11)$$

Формула (11.10) — это, по существу, формула (2.7).

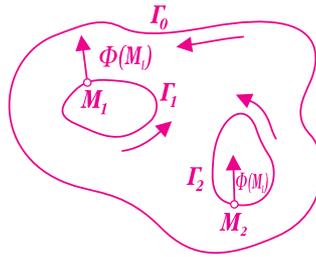


Рис. 11.5

Понятие относительного вращения естественным образом обобщается на случай, когда поле рассматривается на границе Γ многосвязной области. Пусть эта граница состоит из гладких замкнутых кривых $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{\nu-1}$ (см. рис. 11.5), и пусть относительные вращения поля Φ на кривых $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{\nu-1}$ (ориентированных против хода часовой стрелки) равны $I_0, I_1, \dots, I_{\nu-1}$.

Тогда относительное вращение $I(\Phi; \Gamma)$ поля Φ на Γ определяется равенством

$$I(\Phi; \Gamma) = I_0 - I_1 - \dots - I_{\nu-1}. \quad (11.12)$$

Из равенства (11.8) вытекает, что для границ Γ областей, ограниченных ν кривыми, относительное вращение $I(\Phi; \Gamma)$ связано с вращением $\gamma(\Phi, \Gamma)$ равенством

$$I(\Phi; \Gamma) = \gamma(\Phi, \Gamma) - (2 - \nu). \quad (11.13)$$

Если точка M лежит на одной из внутренних кривых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{\nu-1}$, то вектор $\Phi(M)$ естественно называть *нормально входящим*, если он направлен внутрь области Ω по нормали к Γ (на рис. 11.5 вектор $\Phi(M_1)$). Аналогично определяются *нормально выходящие* векторы (на рис. 11.5 вектор $\Phi(M_2)$). Легко видеть, что при таких определениях формула (11.10) при переходе к многосвязным областям остается без изменений:

$$I(\Phi; \Gamma) = m_1 - m_2. \quad (11.14)$$

11.4. Точки локального экстремума на границе области. Вернемся к изучению поля (11.3) градиентов функции $U(x, y)$. Это поле будем рассматривать на гладкой замкнутой кривой Γ , заданной уравнением

$$M(t) = (x(t), y(t)) \quad (a \leq t \leq b). \quad (11.15)$$

Функция $U(x, y)$ на кривой Γ может рассматриваться как функция $u(t)$ параметра t :

$$u(t) = U(x(t), y(t)), \quad (11.16)$$

причем для удобства мы будем считать функцию $u(t)$ продолженной периодически на все значения t . Производная

$$u'(t) = \frac{\partial U}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y} y'(t) = P(x, y) \frac{dx}{dt} + Q(x, y) \frac{dy}{dt} \quad (11.17)$$

— это скалярное произведение вектор-градиента на вектор $(x'(t), y'(t))$, направленный по касательной к Γ . Поэтому вектор $\Phi(t)$ может быть направлен по нормали к Γ лишь в тех точках, в которых $u'(t) = 0$. Уже из этого замечания ясно, что теорема 11.3 может быть применена в некоторых случаях к вычислению вращения поля градиентов. Отметим также, что вектор $\Phi(t)$ обязательно направлен по нормали к Γ в тех точках $M(t)$, в которых $u'(t) = 0$, если функции $x(t)$ и $y(t)$ в (11.16) обладают тем свойством, что

$$|x'(t)| + |y'(t)| > 0 \quad (a \leq t \leq b). \quad (11.18)$$

Ниже через α и β обозначаются соответственно абсолютный минимум и абсолютный максимум функции $u(t)$ (то есть функции $U(x, y)$ на Γ).

Теорема 11.4. Пусть функция $U(x, y)$ имеет на Γ ровно $2m$ точек экстремума, причем во всех m точках локального минимума ее значение равно α , а во всех m точках локального максимума значение функции равно β . Пусть

$$m \neq 1. \quad (11.19)$$

Тогда функция $U(x, y)$ в области $\bar{\Omega}$, ограниченной кривой Γ , имеет по крайней мере одну критическую точку.

Доказательство. Если функция $U(x, y)$ в некоторой точке области Ω принимает значение не из интервала (α, β) , то в области Ω находится точка абсолютного максимума или абсолютного минимума функции $U(x, y)$, рассматриваемой на $\bar{\Omega}$. Тогда точка абсолютного экстремума будет критической точкой функции. Поэтому остается рассмотреть тот случай, когда выполнены неравенства

$$\alpha < U(x, y) < \beta \quad ((x, y) \in \Omega). \quad (11.20)$$

Мы покажем, что в этом случае вращение поля Φ градиентов на Γ равно $-m + 1$, откуда и будет вытекать утверждение теоремы.

В каждой точке минимума $U(x, y)$ на Γ вектор-градиент направлен по нормали к Γ , и, более точно, он является нормально входящим (в противном случае в Ω нашлись бы точки, в которых $U(x, y)$ принимала бы меньшее чем α значение). Аналогично в каждой точке максимума вектор-градиент является нормально выходящим вектором.

Построим входящее покрытие по полю градиентов. Каждая дуга L этого покрытия, содержащая точку минимума, имеет характеристику -1 , так как на дугах, соединяющих соседние точки минимума и максимума, функция $u(t)$ монотонна. По той же причине характеристики дуг входящего покрытия, не содержащих точек минимума, равны нулю. Дуга входящего покрытия не может содержать двух точек минимума, так как в противном случае она содержала бы и промежуточную точку максимума, в которой вектор-градиент нормально выходящий. Итак, характеристика входящего покрытия равна $-m$.

В силу теоремы 11.3 относительное вращение поля градиентов на Γ равно $-m$. Отсюда, в силу формулы (11.8), вращение поля градиентов на Γ равно $-m + 1$.

Теорема доказана.

Теорема 11.4 допускает дальнейшие обобщения как для случая односвязной области Ω , ограниченной замкнутой кривой Γ , так и для случая ν -связных областей¹⁷.

Упражнение 11.3. Пусть функция $U(M)$ задана на Γ и имеет на Γ одну точку минимума и одну точку максимума. Показать, что функцию $U(M)$ можно продолжить на $\bar{\Omega}$ до функции, не имеющей критических точек. Функцию $U(M)$ на Γ и саму кривую Γ можно считать сколь угодно гладкими.

11.5. Входящие и выходящие точки локального экстремума. Проведем дополнительный анализ точек локального экстремума функции $U(M)$, рассматриваемой на гладкой границе Γ области Ω .

Изолированную точку M_0 локального минимума назовем *точкой входящего минимума*, если она является изолированной точкой локального минимума функции $U(M)$, рассматриваемой не только на Γ , но и на всей замкнутой области $\bar{\Omega}$. Иначе говоря, в окрестности точки M_0 нет отличных от нее точек M области $\bar{\Omega}$, в которых $U(M) \leq U(M_0)$. Линии уровня в окрестности точки входящего минимума расположены так, как это показано на рис. 11.6 (возможные изменения этой картины не влияют на дальнейшие рассуждения).

¹⁷См. **А.И. Перов**, *Об одном обобщении теоремы Ролля*, Труды семинара по функциональному анализу (Воронежский ун-т), вып. **6**, 1958; обобщения на случай многосвязных областей указаны **А.И. Поволоцким**.

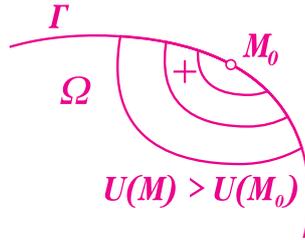


Рис. 11.6

Изолированную точку M_0 локального минимума назовем *точкой выходящего минимума*, если через точку M_0 проходит линия уровня $U(M) = U(M_0)$, разбивающая окрестность точки M_0 в Ω на три части, как это показано на рис. 11.7.

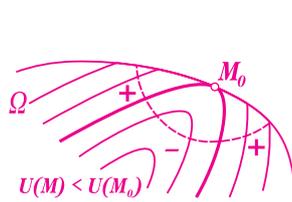


Рис. 11.7

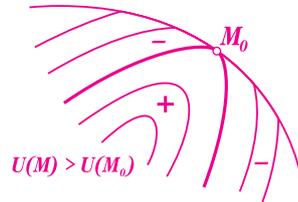


Рис. 11.8

Аналогично определяются *точки M_0 входящего максимума* (рис. 11.8) и *выходящего максимума* (рис. 11.9).

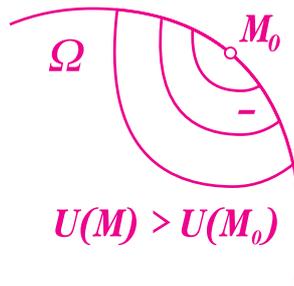


Рис. 11.9

Перечисленными типами точки локального экстремума, конечно, не исчерпываются. Однако в дальнейших построениях можно будет ими ограничиться.

Если функция $U(M)$ непрерывно дифференцируема и в точке M_0 локального экстремума $\text{grad } U(M)$ отличен от нуля, то точка M_0 относится, как легко видеть, к одному из четырех перечисленных типов, причем вектор $\text{grad } U(M)$ будет нормально входящим с характеристикой 1 в точках входящего максимума и с характеристикой -1 в точках входящего минимума.

Допустим, что функция $U(M)$ на Γ имеет конечное число точек локального экстремума, принадлежащих лишь четырем указанным выше типам. Через m_1 обозначим количество точек входящего максимума, а через m_2 — точек входящего минимума. Разность $m_1 - m_2$ назовем *границной характеристикой Морса* функции $U(M)$ на Γ . Эта характеристика определена не только для дифференцируемых функций. Если $U(M)$ непрерывно дифференцируема и Γ состоит из гладких кривых, то, как это следует из формулы (11.14), *границная характеристика Морса функции $U(M)$ на Γ совпадает с относительным вращением векторного поля градиентов на Γ .*

11.6. Устойчивость критических значений. Из теоремы 4.10 вытекает, что критическая точка (x_0, y_0) функции $U(x, y)$ *устойчива*, если ее индекс отличен от нуля. Устойчивость критической точки при этом означает, что по каждому $\rho_0 > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что каждая функция $U_1(x, y)$ имеет по крайней мере одну критическую точку (x_1, y_1) на меньшем, чем ρ_0 , расстоянии от точки (x_0, y_0) , если только

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x} U_1(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} U(x, y) \right| &< \varepsilon_0, \\ \left| \frac{\partial}{\partial y} U_1(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) \right| &< \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Возникает естественный вопрос о том, устойчивы ли критические точки ненулевого индекса относительно возмущений малыми по абсолютной величине функциями, оценки производных которых неизвестны.

Оказывается, что нет.

Рассмотрим в качестве примера функцию

$$U(x, y) = xy \quad (-\infty < x, y < \infty), \quad (11.22)$$

графиком которой является седло. Эта функция имеет единственную критическую точку — начало координат. Индекс этой особой точки равен -1 .

Положим

$$h(x, y) = \operatorname{th} y(x^2 y^2 \operatorname{sign} x - \delta^2) \quad (\delta > 0). \quad (11.23)$$

Эта функция обращается в нуль при $y = 0$ и на линиях $xy = \delta$ ($x > 0$), $xy = -\delta$ ($x > 0$). Непосредственным подсчетом убеждаемся, что $h(x, y)$ непрерывно дифференцируема: ее градиент всюду отличен от нуля.

Пусть непрерывно дифференцируемая функция $\sigma(t)$ равна 1 при $0 \leq t \leq \delta$, нулю при $t \geq 2\delta$ и строго убывает при $\delta < 1 < 2\delta$. Положим

$$\sigma(x, y) = \sigma(|xy|). \quad (11.24)$$

Эта функция непрерывно дифференцируема на всей плоскости.

Определим теперь функцию $U_1(x, y)$ равенством

$$U_1(x, y) = xy + \sigma(x, y)(h(x, y) - xy) \quad (-\infty < x, y < \infty). \quad (11.25)$$

Тогда, во-первых,

$$|U_1(x, y) - U(x, y)| \leq 5\delta^2 + 2\delta,$$

и при малых δ эта разность сколь угодно мала. Во-вторых, функция (11.25) не имеет точек, в которых градиент обращается в нуль. Доказательство предоставляем читателю.

§ 12. Критические точки гармонических и псевдогармонических функций

12.1. Структура линий уровня гармонической функции. Функция $U(x, y)$ называется *гармонической* в области Ω , если она дважды непрерывно дифференцируема в Ω и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \quad (12.1)$$

Функция называется *гармонической в точке*, если она гармоническая в некоторой окрестности точки. В каждой односвязной области гармоническая функция является вещественной частью некоторой аналитической функции $f(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$:

$$U(x, y) = \operatorname{Re} f(z). \quad (12.2)$$

Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ — фиксированная точка, и пусть функция $f(z) - f(z_0)$ в точке z_0 имеет нуль порядка m . Тогда, как известно, разность $f(z) - f(z_0)$ может быть представлена в виде

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m g(z), \quad (12.3)$$

где $g(z_0) \neq 0$. Функция

$$w(z) = (z - z_0)g^{\frac{1}{m}}(z), \quad (12.4)$$

где $g^{\frac{1}{m}}(z)$ — одна из однозначных ветвей корня степени m из $g(z)$, будет аналитична в окрестности точки z_0 . Более того, функция $w(z)$ будет давать конформное отображение этой окрестности на окрестность нулевой точки $w_0 = 0$, так как

$$w'(z_0) = g^{\frac{1}{m}}(z_0) \neq 0.$$

Из (12.3) и (12.4) вытекает, что

$$f(z) - f(z_0) = w^m,$$

или, в полярных координатах,

$$f(z) - f(z_0) = \rho^m (\cos m\phi + i \sin m\phi). \quad (12.5)$$

Поэтому линии уровня

$$U(x, y) = U(x_0, y_0) \quad (12.6)$$

при конформном отображении (12.4) переходят в линии

$$\rho^m \cos m\phi = 0, \quad (12.7)$$

то есть в m прямых, проходящих через нулевую точку и делящих центральный угол на равные части. При переходе через каждую такую прямую функция $\rho^m \cos m\phi$ меняет знак, откуда вытекает, что гармоническая функция при переходе через дугу линии уровня (12.6) переходит от значений меньших, чем $U(x_0, y_0)$, к большим или, наоборот, от больших к меньшим.

Сформулируем полученный результат в ослабленной форме в виде теоремы.

Теорема 12.1. *Существует такая малая окрестность точки $(x_0, y_0) = M_0$ (в которой $U(x, y)$ гармонична), которую можно гомеоморфно отобразить на круг K так, что M_0 перейдет в центр круга K , а линия уровня, проходящая через M_0 , перейдет в систему $2m$ радиусов, делящих круг K на равные секторы. В прообразах двух соседних секторов разность $U(x, y) - U(x_0, y_0)$ имеет противоположные знаки.*

Если $m = 1$, то проходящая через M_0 линия уровня является одной гладкой дугой (рис. 12.1), при переходе через которую разность $U(x, y) - U(x_0, y_0)$ меняет знак (на рис. 12.1 это отмечено знаком $+$ и $-$).

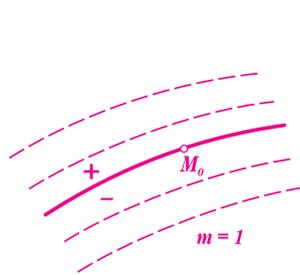


Рис. 12.1

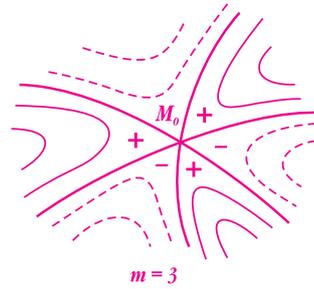


Рис. 12.2

Если $m > 1$, то через M_0 проходят m гладких дуг (рис. 12.2). В соответствии с видом графика функции $U(x, y)$ точка M_0 , для которой $m > 1$, называется *седловой* или просто *седлом*. Число $m - 1$ называется *кратностью седловой точки*. На рис. 12.1 и 12.2 сплошными линиями показаны линии уровня, соответствующие большим, чем $U(x_0, y_0)$, значениям, а пунктирными — линии уровня, соответствующие меньшим значениям.

Отметим некоторые важные следствия из теоремы 12.1. Так как в окрестности каждой точки (x_0, y_0) есть точки, в которых значения $U(x, y)$ больше $U(x_0, y_0)$, и точки, в которых значения $U(x, y)$ меньше $U(x_0, y_0)$, то никакая точка области не может быть точкой экстремума гармонической функции. Отсюда следует, что отличная от константы функция, гармоническая в области Ω и непрерывная на

замкнутой области $\bar{\Omega}$, свое наибольшее и наименьшее значения принимает только на границе области. Это утверждение называют *принципом максимума*.

Из принципа максимума, в свою очередь, вытекает, что отличная от константы функция не может иметь замкнутых линий уровня, внутри которых она гармоническая.

12.2. Индексы особых точек гармонических функций. Рассмотрим поле градиентов гармонической функции $U(x, y)$:

$$\text{grad } U(x, y) = (U'_x(x, y), U'_y(x, y)). \quad (12.8)$$

Пусть в окрестности точки (x_0, y_0) функция $U(x, y)$ является вещественной частью аналитической функции

$$f(z) = U(x, y) + iV(x, y). \quad (12.9)$$

Из условий аналитичности Коши-Римана

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

вытекает, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \text{Re } f'(z), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\text{Im } f'(z),$$

то есть

$$U'_x(x, y) + iU'_y(x, y) = \overline{f'(z)}. \quad (12.10)$$

Последнее равенство означает, что (x_0, y_0) является особой точкой векторного поля градиентов, если она является нулем функции $f'(z)$, то есть она является нулем второго или более высокого порядка функции $f(z) - f(z_0)$. Таким образом, критические точки гармонической функции — это седловые точки различной кратности. В остальных точках градиент гармонической функции отличен от нуля.

Из теоремы 12.1 следует, что каждая критическая точка изолирована. Отсюда вытекает, что *гармоническая в области Ω и непрерывно дифференцируемая на $\bar{\Omega}$ функция имеет лишь конечное число критических точек, если нет критических точек на границе области.*

Преобразование $w = \bar{z}$ перехода к сопряженной точке есть линейное преобразование плоскости в себя. Определитель этого преобразования равен -1 , и поэтому его степень также равна -1 . Из теоремы 5.6 поэтому вытекает, что вращения полей $f(z)$ и $\overline{f(z)}$ на любой кривой отличаются друг от друга знаком.

Теорема 12.2. *Индекс седловой точки гармонической функции (как критической точки) равен ее кратности $m - 1$, взятой со знаком минус.*

Доказательство. Из равенства (12.10) вытекает, что индекс отличается знаком от порядка нуля z_0 функции $f'(z)$, который (порядок) в силу (12.3) равен $m - 1$.

Теорема доказана.

В дальнейшем мы функцию $U(x, y)$ будем называть *гармонической в области* Ω , если она в старом определении гармонична лишь в области Ω с некоторыми выброшенными (как говорят, выколотыми) точками. Эти выколотые точки — особые точки гармонической функции.

Например, гармонические функции

$$U_1(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad U_2(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \ln(x^2 + y^2), \quad (12.11)$$

как легко проверить, имеют единственную особую точку $(0, 0)$.

Функция, гармоническая в окрестности особой точки z_0 , также может быть представлена как вещественная часть функции $f(z)$, аналитической в окрестности точки z_0 , но не обязательно однозначной. Эта теорема ниже не используется в общей форме.

Мы ограничимся рассмотрением лишь таких особых точек z_0 , в окрестности которых гармоническая функция $U(x, y)$ является вещественной частью функции $f(z)$ вида

$$f(z) = k \ln(z - z_0) + \frac{A(z)}{(z - z_0)^m} + B(z), \quad (12.12)$$

где k — некоторое вещественное число, $A(z)$ и $B(z)$ — аналитические в точке z_0 функции, причем $A(z_0) \neq 0$. Нетрудно видеть, что логарифмическое слагаемое в (12.12) не приводит к многозначности вещественной части.

Особая точка гармонической функции — это особая точка поля градиентов. *Индекс особой точки гармонической функции* — это, по определению, индекс особой точки поля градиентов.

Особую точку (x_0, y_0) гармонической функции $U(x, y)$ назовем *полосом порядка* m , если в окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$

$$U(x, y) = \operatorname{Re} \frac{A(z)}{(z - z_0)^m}, \quad (12.13)$$

где $A(z)$ аналитична в точке z_0 и $A(z_0) \neq 0$.

Теорема 12.3. *Полос порядка m гармонической функции $U(x, y)$ имеет индекс, равный $m + 1$.*

Доказательство. Из (12.13) и из равенства (12.10) вытекает, что индекс полюса порядка m гармонической функции отличается знаком от индекса полюса $z = z_0$ функции $\frac{d}{dz} \frac{A(z)}{(z - z_0)^m}$. Остается вспомнить (см. § 9), что индекс полюса аналитической функции равен взятому со знаком минус порядку полюса.

Теорема доказана.

Точку z_0 назовем *логарифмическим полюсом нулевого порядка* функции $U(x, y)$, если

$$U(x, y) = \operatorname{Re} (k \ln(z - z_0) + A(z)) \quad (12.14)$$

и $k \neq 0$. В общем случае (12.12) особую точку z_0 назовем *логарифмическим полюсом порядка m* .

Аналогично теоремам 12.2 и 12.3 доказывается¹⁸

Теорема 12.4. *Индекс логарифмического полюса порядка t гармонической функции равен $t + 1$.*

Упражнение 12.1. *Вещественной частью каких аналитических функций являются функции (12.11)?*

12.3. Вращение поля градиентов гармонической функции. Пусть функция $U(x, y)$ гармонична в области Ω и непрерывно дифференцируема на $\bar{\Omega}$, включая границу Γ . Допустим, что $U(x, y)$ на Γ не имеет критических точек, а в области Ω имеет лишь особые точки перечисленных выше видов (седловые точки, полюсы и логарифмические полюсы).

Через s обозначим сумму кратностей седловых точек, через p_1 — количество остальных особых точек, а через p_2 — сумму порядков этих остальных особых точек. Из теоремы об алгебраическом числе особых точек векторного поля вытекает равенство

$$\gamma(\text{grad } U, \Gamma) = p_1 + p_2 - s, \quad (12.15)$$

где $\gamma(\text{grad } U, \Gamma)$ — вращение поля градиентов на Γ .

В качестве примера рассмотрим функцию Грина ν -связной области Ω , то есть гармоническую функцию, равную нулю на границе Γ области Ω и имеющую в области Ω , кроме возможных седловых точек, лишь один логарифмический полюс нулевого порядка. Как было показано при доказательстве теоремы 11.2, вращение поля градиентов равно $2 - \nu$. Из формулы (12.15) вытекает поэтому

Теорема 12.5. *Функция Грина ν -связной ($\nu > 1$) области Ω имеет в Ω седловые точки, сумма кратностей которых равна $\nu - 1$.*

12.4. Псевдогармонические функции. Класс псевдогармонических в области Ω функций мы определим в два этапа.

Во-первых, к этому классу относятся такие функции $U(x, y)$, которые можно представить в виде

$$U(x, y) = U_1(\xi(x, y), \eta(x, y)), \quad (12.16)$$

где $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ — компоненты гомеоморфного степени 1 (сохраняющего ориентацию) преобразования

$$T(x, y) = (\xi(x, y), \eta(x, y)) \quad (12.17)$$

области Ω в некоторую область Ω_1 , а $U_1(\xi, \eta)$ — гармоническая функция. При этом допускается существование у функции $U_1(\xi, \eta)$ изолированных особых точек (полюсов, логарифмических полюсов и т.д.); им соответствуют особые точки псевдогармонической функции.

¹⁸В работах М. Морса, а также Ф.Д. Гахова и Ю.М. Крикунова (см. Изв. АН СССР, серия матем., 20 (1956), *Топологические методы теории функций комплексного переменного и их приложения к обратным краевым задачам*) индексы особых точек изучались в других терминах и для их вычисления применялись специальные приемы. Вычисление индексов особых точек гармонических и псевдогармонических функций с помощью вращения проведено А.И. Поволоцким в статье *Индексы особых точек псевдоаналитических функций*, ДАН СССР 129, №2 (1959).

Во-вторых, функция $U(x, y)$ псевдогармонична в области Ω , если для каждой точки области Ω найдется окрестность, в которой $U(x, y)$ псевдогармонична в предыдущем смысле. Преобразование (12.17) здесь для каждой окрестности конструируется независимо от аналогичных преобразований для других окрестностей.

Непосредственно из определения вытекает, что локальные свойства псевдогармонической функции такие же, как и локальные свойства гармонической функции. В частности, теорема 12.1 о локальной структуре линий уровня в окрестности точки (x_0, y_0) без изменений переносится на случай псевдогармонической функции, для которой (x_0, y_0) не является особой точкой. Отсюда вытекают важные свойства псевдогармонических функций: внутренние неособые точки не являются точками экстремума, верен принцип максимума, линии уровня не могут ограничивать односвязную область псевдогармоничности (в которой нет особых точек).

Пусть псевдогармоническая функция $U(M)$ в окрестности G точки M определена равенством

$$U(M) = U_1(TM), \quad (12.18)$$

где $U_1(N)$ — гармоническая функция, а T — гомеоморфное преобразование степени 1 окрестности G . Если $T(M_0)$ — особая точка функции $U_1(N)$, то M_0 будет, по определению, *особой точкой* функции $U(M)$. Индекс особой точки $T(M_0)$ функции $U_1(N)$ назовем *индексом* особой точки M_0 псевдогармонической функции $U(M)$.

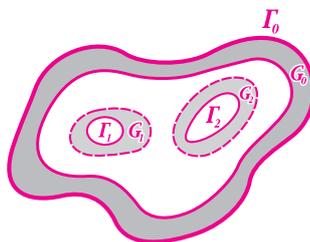


Рис. 12.3

Рассмотрим псевдогармоническую функцию $U(M)$ в ν -связной замкнутой области $\bar{\Omega}$, граница которой Γ состоит из частей $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{\nu-1}$ (см. рис. 12.3). Ниже предполагается, что для каждого замкнутого множества Γ_i может быть указана в $\bar{\Omega}$ окрестность G_i , на которой определено такое гомеоморфное преобразование T_i , что

$$U(M) = U_i(T_i(M)) \quad (M \in G_i), \quad (12.19)$$

где U_i — непрерывно дифференцируемая на $T_i(G_i)$ функция, градиент которой не обращается в нуль. В частности, можно было бы предположить, что сама функция $U(M)$ непрерывно дифференцируема в окрестности Γ , причем $U \neq 0$ в этой окрестности.

Вращение поля градиентов функции $U_i(M)$ на $T_i(\Gamma_i)$ обозначим через γ_i . Назовем *второй граничной характеристикой* функции $U(M)$ на Γ число

$$\tilde{\gamma}(U; \Gamma) = \gamma_0 - \gamma_1 - \dots - \gamma_{\nu-1}. \quad (12.20)$$

Допустим, что в Ω псевдогармоническая функция имеет лишь конечное число особых точек M_1, \dots, M_n , индексы которых обозначим через $\gamma(M_1), \dots, \gamma(M_n)$. Оказывается, что имеет место важное равенство

$$\tilde{\gamma}(U; \Gamma) = \gamma(M_1) + \dots + \gamma(M_n). \quad (12.21)$$

Это равенство совпадает с теоремой об алгебраическом числе особых точек непрерывного векторного поля, если $U(M)$ непрерывно дифференцируема на $\bar{\Omega}$; для общего случая требуется специальное доказательство.

Из формулы (12.21) вытекает, что индекс особой точки не зависит от того, при помощи каких гомеоморфизмов определена (см. формулу (12.18)) псевдогармоничность функции $U(M)$ в окрестности особых точек. Из этой же формулы вытекает, что $\tilde{\gamma}(U; \Gamma)$ не изменится, если в формулах (12.19) выбирать разные гомеоморфизмы T_i .

Для доказательства формулы (12.21) поступим стандартным способом. Выберем из области Ω непересекающиеся круги малого радиуса с центрами M_1, \dots, M_n и обозначим оставшуюся область через Ω_1 (см. рис. 12.4). Из определения вытекает, что вторая граничная характеристика $\tilde{\gamma}(U; \Gamma_1)$ функции $U(M)$ на границе Γ_1 области Ω_1 равна

$$\tilde{\gamma}(U; \Gamma_1) = \tilde{\gamma}(U; \Gamma) - \gamma(M_1) - \dots - \gamma(M_n). \quad (12.22)$$

Таким образом, формула (12.21) будет доказана, если мы покажем, что вторая граничная характеристика псевдогармонической функции равна нулю, если в области нет особых точек.

Наметим доказательство последнего утверждения.

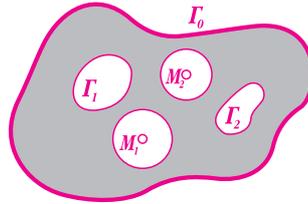


Рис. 12.4

Пусть G_i — окрестность одной из частей Γ_i границы Γ ν -связной области Ω , введенная при определении второй граничной характеристики функции $U(M)$ на Γ . Пусть T_i — определенное на G_i гомеоморфное отображение, а $U_i(M)$ — определенная на $T_i(G_i)$ непрерывно дифференцируемая функция (см. формулу (12.19)). Так как $\text{grad } U_i(M)$ на $T_i(G_i)$ отличен от нуля, то линии уровня функции $U_i(M)$ на $T_i(G_i)$ не пересекаются и не самокасаются; с одной стороны каждой линии уровня функция $U(M)$ принимает большее значение, а с другой — меньшее. Геометрически очевидно (см. рис. 12.5), что в области $T_i(G_i)$ можно провести такую гладкую кривую L_i , которая пересекает под ненулевым углом линии уровня функции $U_i(M)$ во всех точках, кроме конечного числа, а в этих специальных точках (на рис. 12.5

— точки N_1 и N_2) касательна с одной стороны к соответствующим линиям уровня. Сразу же отметим, что эти специальные точки являются точками локального экстремума функции $U_i(M)$ на L_i ; более того, эти точки будут либо входящими, либо выходящими точками экстремума (см. п. 11.5).

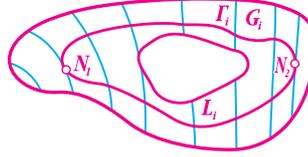


Рис. 12.5

Значения функций $U_i(M)$ в этих точках экстремума будем называть *специальными значениями*. Без ограничения общности можно считать, что специальные значения, соответствующие всем точкам локального экстремума на всех кривых L_i , различны.

Кривую L_i можно провести так, что вращение поля градиентов функции $U_i(M)$ на ней будет равно вращению этого поля на $T_i(\Gamma_i)$. Это вращение в силу формулы (11.11) отличается на 1 от разности между числом входящих точек максимума и входящих точек минимума.

Через Ω^* обозначим область, граница Γ^* которой состоит из замкнутых жордановых кривых $T_i^{-1}(L_i)$. Из проведенных построений вытекает, что

$$\tilde{\gamma}(U; \Gamma^*) = \tilde{\gamma}(U; \Gamma). \quad (12.23)$$

Поэтому достаточно доказать, что $\tilde{\gamma}(U; \Gamma^*) = 0$.

Точки локального экстремума функции $U(M)$ на кривых $T_i^{-1}(L_i)$ соответствуют, очевидно, точкам локального экстремума функций $U_i(M)$ на кривых L_i , причем тип точки при этом соответствии сохраняется. Следовательно, все точки локального экстремума функции $U(M)$ на Γ^* являются либо входящими, либо выходящими точками экстремума. Из построения вытекает при этом, что вторая граничная характеристика отличается на $2 - \nu$ от разности $m_1 - m_2$ числа m_1 точек входящего максимума и числа m_2 точек входящего минимума (сравните формулы (11.13) и (11.14)).

Таким образом, формула (12.21) будет полностью доказана, если мы установим, что

$$m_2 - m_1 = 2 - \nu, \quad (12.24)$$

если функция $U(M)$ не имеет на Ω^* особых точек и на Γ^* имеет лишь конечное число точек локального экстремума, являющихся либо входящими, либо выходящими точками экстремума. Значения функции $U(M)$ в этих точках локального экстремума назовем специальными значениями; можно считать, что все эти специальные значения различны.

Эйлеровой характеристикой $E(G)$ замкнутого множества с конечным числом k компонент G_1, \dots, G_k называется число

$$E(G) = 2k - \nu(G_1) - \dots - \nu(G_k), \quad (12.25)$$

где $\nu(G_i)$ — порядок связности множества G_i ; (предполагается, что порядки связности конечны). В частности, эйлерова характеристика ν -связного множества равна $2 - \nu$. На рис. 12.6 указана эйлерова характеристика изображенных множеств. На рис. 12.7 около каждой вертикальной прямой указана эйлерова характеристика замкнутой части изображенной фигуры, лежащей справа от прямой.

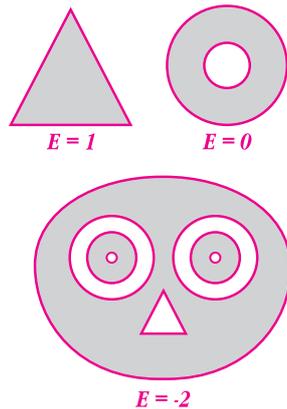


Рис. 12.6

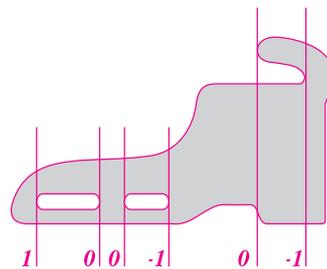


Рис. 12.7

Через G_c обозначим множество тех точек $M \in \bar{\Omega}^*$, в которых значения $U(M)$ не превышают c . Проследим за тем, как меняется эйлерова характеристика множества G_c при возрастании c . Нетрудно видеть, что эта эйлерова характеристика меняется лишь при прохождении c через специальные значения, соответствующие точкам входящего экстремума. При прохождении через специальное значение, соответствующее точке входящего минимума, в множестве G_c появляется новая односвязная компонента, а порядки связности остальных компонент не меняются; поэтому эйлерова характеристика возрастает на 1. При прохождении через специальное значение, соответствующее точке входящего максимума, либо количество компонент не меняется, но увеличивается порядок связности одной из них, либо две компоненты “сливаются”, то есть число компонент уменьшается на 1, превращаясь в компоненту, порядок связности которой на 1 меньше, чем сумма порядков связности слившихся компонент; в обоих случаях эйлерова характеристика уменьшается на 1. Таким образом, эйлерова характеристика $\bar{\Omega}^*$ равная $2 - \nu$, совпадает с разностью числа m_1 точек входящего минимума и числа m_2 точек входящего максимума.

Равенство (12.24), а вместе с ним и основное равенство (12.21) установлены.

Основное приложение псевдогармонические функции находят при изучении так называемых *псевдоаналитических функций* $\phi(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$, то есть таких функций, которые в некоторой окрестности каждой точки z можно представить

$$\phi(z) = f(T(z)), \quad (12.26)$$

где T — гомеоморфное преобразование степени 1 упомянутой окрестности, а $f(z)$ — аналитическая функция. Функция $f(z)$ и гомеоморфизм T для окрестностей различных точек z_0 могут быть разными.

Если $\phi(z)$ псевдоаналитична, то функция

$$U(x, y) = \ln |\phi(z)| \quad (12.27)$$

псевдогармонична. Нулям и полюсам функции $\phi(z)$ соответствуют логарифмические полюсы нулевого порядка функции $U(x, y)$; их индекс известен (см. теорему 12.4). Особыми точками (седлами) функции $U(x, y)$ будут также те точки z_0 , в окрестности которых функция $\phi(z)$ не однолистка, то есть в прообразах точек ветвления функции обратной к $\phi(z)$. Прообразы точек ветвления — это такие точки z_0 , что в точках $T(z_0)$ обращается в нуль производная $f'(z)$ функции $f(z)$ из представления (12.26). Кратность седла, а следовательно (см. теорему 12.2) и индекс соответствующей особой точки, определяется порядком нуля $T(z_0)$ производной $f'(z)$.

Формула (12.21) позволяет поэтому установить зависимости между числами нулей, полюсов и прообразов точек ветвления аналитической или псевдоаналитической функции и между вращением поля градиентов функции (12.27) на границе области.

Аналогичные рассуждения позволяют связать индексы особых точек с порядками некоторых точек относительно образа границы области при преобразовании ее псевдоаналитической функцией. Соответствующая теория детально развита М. Морсом¹⁹.

§ 13. Особые точки дифференциальных уравнений²⁰

13.1. Определения. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y). \end{aligned} \quad (13.1)$$

Будем считать, что правые части определены и непрерывны по совокупности переменных во всей плоскости или в некоторой области. Более того, будем считать, что правые части обладают такими свойствами, которые обеспечивают единственность решения системы (13.1) при заданных начальных условиях; как известно, для этого достаточно непрерывной дифференцируемости функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

¹⁹М. Морс, *Топологические методы теории функций комплексного переменного*, ИЛ, 1951.

²⁰Детальное исследование особых точек читатель найдет, например, в следующих книгах: В.В. Немыцкий и В.В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, М. -Л., 1949; Э.А. Коддингтон и Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, 1958; С. Лефшец, *Геометрическая теория дифференциальных уравнений*, ИЛ, Москва 1961.

Каждое решение

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (13.2)$$

системы (13.1) удобно рассматривать как параметрически заданную кривую на плоскости с прямоугольными координатами (x, y) . Например, система

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x \quad (13.3)$$

имеет двупараметрическое семейство решений

$$x = C_1 \cos(t + C_2), \quad y = C_1 \sin(t + C_2) \quad (13.4)$$

(C_1 и C_2 — произвольные постоянные), которое определяет на плоскости семейство концентрических окружностей (см. рис. 13.1).

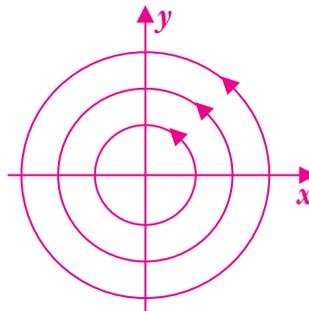


Рис. 13.1

В качестве второго примера рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x. \quad (13.5)$$

Ее решениям

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} \quad (13.6)$$

на плоскости соответствует семейство кривых, изображенное на рис. 13.2.

Наконец, в качестве последнего примера рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = y \quad (13.7)$$

Ее решениям соответствуют лучи, выходящие из начала координат (рис. 13.3).

Кривые (13.2) называют *интегральными кривыми* системы (13.1). В некоторых случаях систему (13.1) удобно рассматривать как закон движения точек по плоскости; тогда правые части системы — это компоненты вектора скорости в точке (x, y) , а интегральные кривые — это траектории, по которым движутся точки.

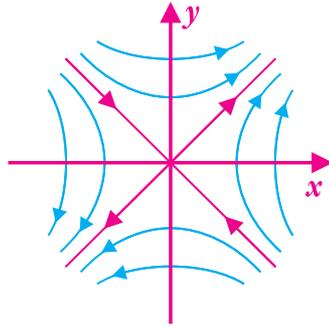


Рис. 13.2

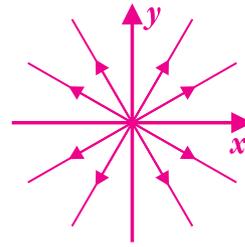


Рис. 13.3

Следует помнить, что система (13.1) определяет не только интегральные кривые, но и положительное направление на них, которое соответствует перемещению точки (13.2) при возрастании “времени” t .

Системы вида (13.1) называют *автономными* в отличие от систем вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y, t), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y, t), \end{aligned} \tag{13.8}$$

правые части которых явно зависят от t . Решения автономной системы обладают той особенностью, что перемещение точки (x_0, y_0) за время от t_0 до t_1 по траектории системы полностью определяется разностью $t_1 - t_0$ и не зависит от t_0 .

Систему ориентированных интегральных кривых на плоскости называют *фазовым портретом* системы (13.1).

Нас будут интересовать, в основном, решения двух специальных типов: особые точки и периодические решения. Точку (x_0, y_0) называют *особой точкой* системы (13.1), если скорость в этой точке равна нулю. Отсюда вытекает, что особые точки определяются как решения системы

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0. \tag{13.9}$$

Если (x_0, y_0) — особая точка системы (13.1), то

$$x \equiv x_0, \quad y \equiv y_0 \tag{13.10}$$

— это одно из решений системы. Такое решение изображается на фазовом портрете точкой (для систем, чьи фазовые портреты изображены на рис. 13.1-13.3, единственная особая точка — начало координат).

Индексом особой точки (x_0, y_0) системы дифференциальных уравнений (13.1) называется индекс (в смысле гл. 1) особой точки (x_0, y_0) векторного поля

$$\Phi(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)). \tag{13.11}$$

Периодические решения на фазовом портрете изображаются, очевидно, замкнутыми кривыми. Их называют *циклами*.

13.2. Признаки существования особых точек. Так как особая точка системы дифференциальных уравнений — это решение системы (13.9), то для доказательства существования особых точек может быть применена методика, изложения в § 10. Иначе говоря, если удастся найти область Ω , на границе которой вращение поля (13.11) отлично от нуля, то в области Ω есть по крайней мере одна особая точка системы (13.1).

Укажем несколько примеров.

Теорема 13.1 (Пуанкаре-Бендиксон). *Если система (13.1) имеет периодическое решение, то она имеет особую точку.*

Доказательство. Цикл Γ , соответствующий периодическому решению, является замкнутой кривой (см. рис. 13.4). Из определения интегральной кривой вытекает, что векторное поле (13.11) на Γ — это поле касательных. В силу теоремы 2.3 вращение этого поля Φ на Γ равно 1.

Следовательно, поле Φ внутри Γ имеет по крайней мере одну особую точку.

Теорема доказана.

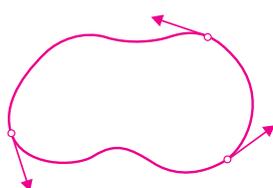


Рис. 13.4

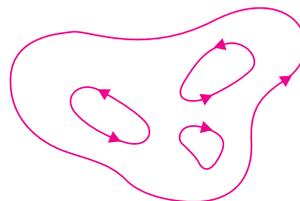


Рис. 13.5

В теореме 13.1, естественно, предполагается, что система (13.1) задана всюду внутри цикла.

Эта теорема может быть обобщена, например, следующим образом. Допустим, что граница ν -связной области Ω состоит из циклов системы (13.1) (см. рис. 13.5), причем $\nu \neq 2$. Тогда вращение поля (13.11) на границе Γ области Ω будет отлично от нуля, и поэтому в области Ω система (13.1) будет иметь по крайней мере одну особую точку.

Для случая $\nu = 2$ последнее утверждение, очевидно, не имеет места. Например, между двумя циклами системы (13.3) нет особых точек.

Упражнение 13.1. *Допустим, что система (13.1) имеет два расположенных один внутри второго цикла. Пусть движение на этих циклах направлено в разные стороны (см. рис. 13.6). Возникает естественное предположение, что в кольце между такими циклами обязательно есть особые точки системы. Покажите, что это предположение неверно²¹.*

²¹А. Пуанкаре обнаружил, а Дж. Биркгоф доказал (см. Дж. Биркгоф, *Динамические системы*, М.-Л. 1941) следующий замечательный факт. Допустим, что при преобразовании кольца, изображенного на рис. 13.6, осуществляемом сдвигом по траекториям системы за любой фиксированный промежуток времени площадь (мера) каждой части кольца не меняется. Тогда в кольце есть особые точки системы.

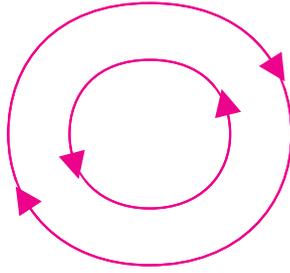


Рис. 13.6

Теорема 13.1 может применяться и в следующей форме:

Теорема 13.2. *Если в односвязной области Ω нет особых точек системы (13.1), то в ней нет и циклов системы.*

Рассмотрим, например, систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y, \\ \frac{dy}{dt} &= -3xy^2 + 4x^2y + 2x + 1. \end{aligned} \tag{13.12}$$

у этой системы нет положительных ($x(t) > 0$, $y(t) > 0$) периодических решений, так как в первом квадранте нет особых точек. Действительно, из первого уравнения вытекает, что все особые точки расположены на прямой $y = x$, а из второго, что абсциссы особых точек являются корнями уравнения

$$x^3 + 2x + 1 = 0 \tag{13.13}$$

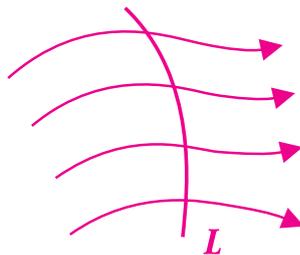


Рис. 13.7

Гладкая дуга L , не содержащая особых точек системы, называется *дугой без контакта* для системы (13.1), если в каждой точке этой дуги вектор скорости (вектор поля (13.11)) образует отличный от нуля угол с кривой L . Иначе говоря, траектории системы пересекают дугу без контакта под ненулевым углом (см. рис. 13.7).

Теорема 13.3. (Бендиксон). Пусть граница области Ω состоит из части Γ траектории одного из решений системы (13.1) и из одной дуги L без контакта. Тогда в Ω есть по крайней мере одна особая точка системы (13.1).

Доказательство. Пусть M_1 и M_2 — концы дуги L без контакта; для определенности будем считать, что при движении по траектории Γ точка перемещается от точки M_1 к точке M_2 (см. рис. 13.8).

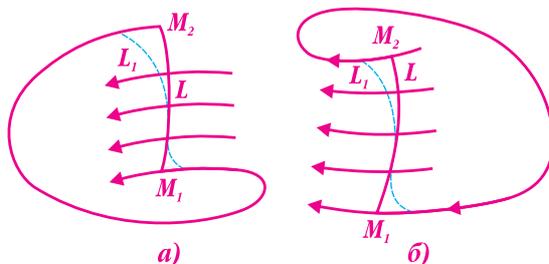


Рис. 13.8

Геометрически очевидно, что кривую L можно заменить близкой кривой L_1 так, что замкнутая кривая, составленная из L_1 и Γ , будет гладкой, и так, что на этой замкнутой кривой Π векторы скорости не будут направлены по одному из направлений нормали к Π . На рис. 13.8 кривая L_1 изображена пунктиром; в случае б) векторы поля не направлены по внешней нормали к кривой Π , в случае б) не направлены по внутренней нормали.

Вращение поля (13.11) на $\Gamma \cup L$ равно, очевидно, вращению на Π . В силу теоремы 4.3 поле (13.11) на Π гомотопно полю нормалей к Π , и из теоремы 2.4 вытекает, что его вращение равно 1.

Теорема доказана.

В теореме 13.3 предполагается, что система (13.1) задана на всей области Ω .

Из непрерывности и любой гладкости правых частей системы (13.1) не вытекает, что решения системы определены при всех значениях t . Например, решения уравнения $\frac{dx}{dt} = 1 + x^2$ имеют вид $x = \operatorname{tg}(t + c)$ и каждое из них определено лишь на конечном интервале $\left(-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right)$. Это обстоятельство иногда усложняет рассуждения, так как оно вынуждает следить за тем, при каких t определено то или иное решение. В связи с этим при изучении произвольной системы (13.1) удобно заменять эту систему другой с тем же фазовым портретом, но с решениями, определенными при всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Дальнейшие построения настоящего пункта относятся к случаю, когда система задана на всей плоскости.

Рассмотрим наряду с системой

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y). \end{aligned} \tag{13.1}$$

систему

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y)R(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y)R(x, y).\end{aligned}\tag{13.14}$$

где $R(x, y)$ — положительная непрерывная функция. Переход к новой системе равносильен переходу от поля скоростей (13.11) к новому полю скоростей

$$\Phi(x, y) = (P(x, y)R(x, y), Q(x, y)R(x, y)).\tag{13.15}$$

Нетрудно видеть, что векторы двух полей одинаково направлены. Поэтому интегральные кривые у систем (13.1) и (13.14) также одинаковы и одинаково ориентированы; у этих систем одинаковые особые точки, одинаковые циклы ²².

Выберем функцию $R(x, y)$ специальным образом. Пусть

$$R(x, y) = \frac{1}{1 + P^2(x, y) + Q^2(x, y)}.\tag{13.16}$$

Тогда правые части системы (13.14) будут равномерно ограничены. Отсюда вытекает, что решения системы определены при всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Проведенные рассуждения позволяют во многих случаях не следить за тем, при каких t определены решения предполагая без ограничения общности, что все они определены при всех t . До конца настоящего пункта будем считать, что это предположение сделано.

Решение $(x(t), y(t))$, по определению, уходит двусторонне в бесконечность, если

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (x^2(t) + y^2(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x^2(t) + y^2(t)) = \infty.\tag{13.17}$$

Теорема 13.4. *Если система имеет решение, которое не уходит двусторонне в бесконечность, то она имеет по крайней мере одну особую точку.*

Доказательство. Пусть решение $(x_0(t), y_0(t))$ не уходит двусторонне в бесконечность. Для определенности будем считать, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x^2(t) + y^2(t)) < \infty.\tag{13.18}$$

Это значит, что для некоторой последовательности моментов времени $t_n \rightarrow \infty$ точки M_n с координатами $(x_0(t_n), y_0(t_n))$ находятся в ограниченной части плоскости. Можно без ограничения считать, что точки M_n сходятся в некоторой точке N_0 с координатами (x^*, y^*) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_0(t_n) = x^*, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_0(t_n) = y^*.$$

Если точка N_0 особая, то теорема доказана.

²²Нетрудно видеть, что для системы (13.14) верна теорема единственности решения, удовлетворяющего каждому заданному начальному условию, если эта теорема верна для системы (13.1)

Остается рассмотреть случай, когда N_0 — неособая точка. Из соображений непрерывности вытекает, что в некоторой окрестности U точки N_0 векторы поля $\Phi(M)$ скоростей образуют угол меньше $\frac{\pi}{2}$ с вектором $\Phi(N_0)$.

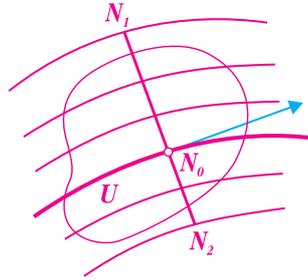


Рис. 13.9

Проведем через точку N_0 отрезок $[N_1, N_2]$ перпендикулярно вектору $\Phi(N_0)$. Если отрезок $[N_1, N_2]$ достаточно мал и окрестность U достаточно мала, то все траектории, проходящие через точки окрестности U , будут пересекать отрезок $[N_1, N_2]$ под некоторым ненулевым углом. Иначе говоря, отрезок $[N_1, N_2]$ будет дугой без контакта для изучаемой системы (см. рис. 13.9).

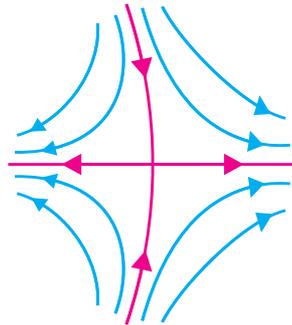


Рис. 13.10

Так как последовательность $(x_0(t_n), y_0(t_n))$ сходится к точке N_0 , то интегральная кривая $(x_0(t), y_0(t))$ пересекает отрезок $[N_1, N_2]$ бесконечное число раз. Пусть t^* и t^{**} — два последовательных момента времени, в которые эта кривая пересекает отрезок без контакта. Тогда кривая $(x_0(t), y_0(t))$ ($t^* \leq t \leq t^{**}$) и часть отрезка без контакта, заключенная между точками $(x_0(t^*), y_0(t^*))$ и $(x_0(t^{**}), y_0(t^{**}))$ (не исключено, что эти точки совпадают), образуют замкнутую кривую, ограничивающую некоторую область Ω . В силу теоремы 13.3 в Ω есть по крайней мере одна особая точка системы.

Теорема доказана.

13.3. Индекс особой точки. Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy. \quad (13.19)$$

Нулевая точка будет изолированной особой точкой, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0. \quad (13.20)$$

Из теоремы 6.1 вытекает, что индекс γ_0 нулевой особой точки определяется равенством

$$\gamma_0 = \text{sign } \Delta. \quad (13.21)$$

Рассмотрим подробнее случай, когда $\gamma_0 = -1$. В этом случае характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (13.22)$$

имеет два различных вещественных корня λ_1 и λ_2 разного знака. Общее решение системы (13.19) запишется тогда в виде (если $b \neq 0$)

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad y(t) = \frac{C_1(\lambda_1 - a)}{b} e^{\lambda_1 t} + \frac{C_2(\lambda_2 - a)}{b} e^{\lambda_2 t}, \quad (13.23)$$

откуда вытекает, что фазовый портрет системы имеет вид, указанный на рис 13.10. Нулевую особую точку называют в этом случае *седловой* или *седлом*. Итак, индекс $\gamma_0 = -1$ лишь в том случае, когда особая точка линейной системы есть седло.

Когда $\gamma_0 = 1$, то характер расположения интегральных кривых в окрестности особой точки определяется значениями корней λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (13.22). Детальный анализ расположения интегральных кривых проводится в общих курсах обыкновенных дифференциальных уравнений²³. Мы напоминаем рисунком 13.11 лишь окончательные результаты.

Перейдем к рассмотрению нелинейной системы (13.1) с дифференцируемыми в нуле правыми частями. Пусть (x_0, y_0) — ее особая точка. Систему (13.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + P'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + P_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + Q'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + Q_1(x, y). \end{aligned} \quad (13.24)$$

где $P_1(x, y)$ и $Q_1(x, y)$ — такие функции, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{P_1(x, y)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{Q_1(x, y)}{r} = 0 \quad (13.25)$$

и $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Равенства (13.25) означают, что система (13.24) может рассматриваться как возмущенная в окрестности особой точки (x_0, y_0) линейная система

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + P'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \\ \frac{dy}{dt} &= Q'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + Q'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \end{aligned} \quad (13.26)$$

²³См. В.В. Степанов, *Курс дифференциальных уравнений*, Физматгиз, 1959 г., Э. А. Коддингтон и Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, 1958.

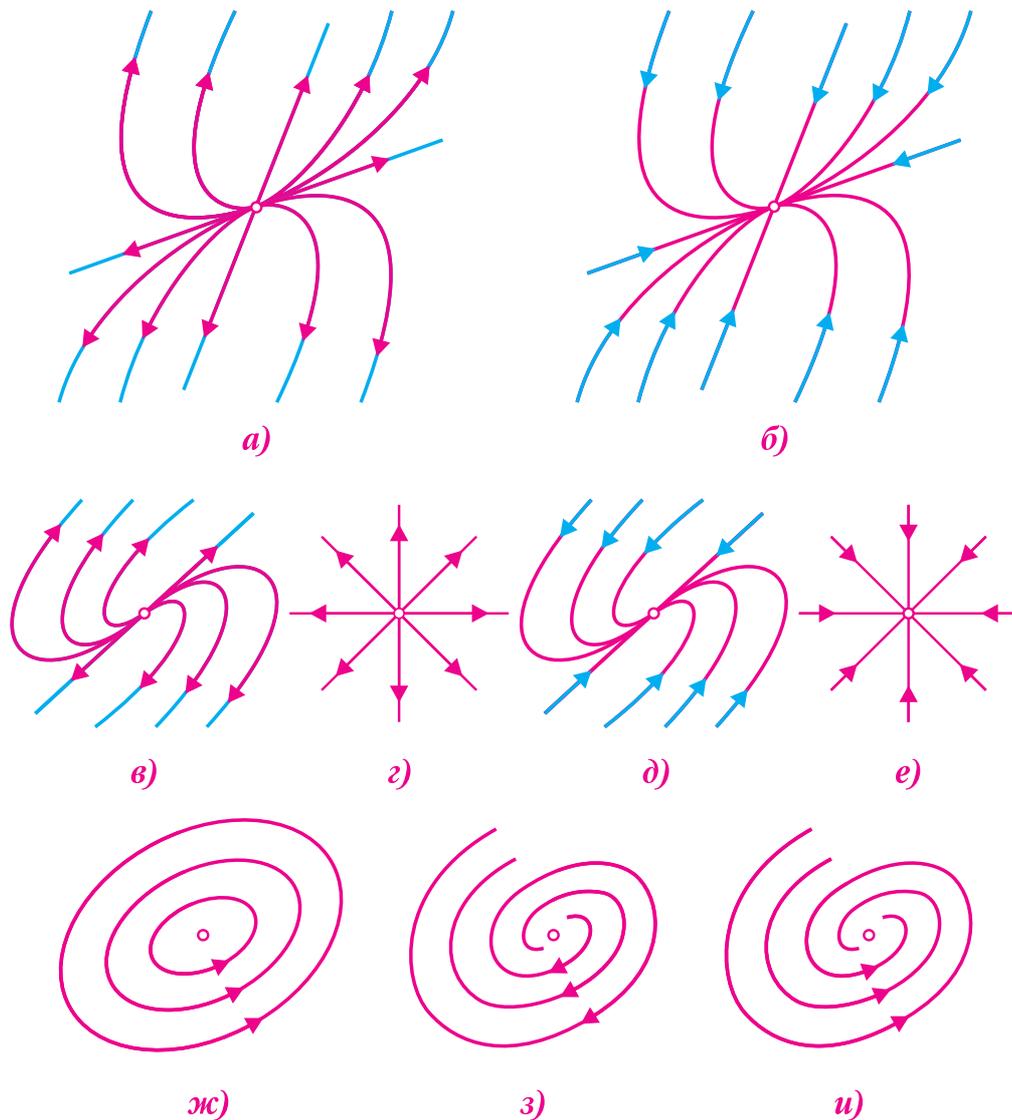


Рис. 13.11. а) λ_1, λ_2 различны, вещественны и положительны; неустойчивый узел; б) λ_1, λ_2 различны, вещественны и отрицательны; устойчивый узел; в), г) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$; неустойчивый узел; д), е) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$; устойчивый узел; ж) λ_1, λ_2 чисто мнимые; центр; з) λ_1, λ_2 комплексные, $\text{Re } \lambda > 0$, неустойчивый фокус; и) λ_1, λ_2 комплексные, $\text{Re } \lambda < 0$; устойчивый фокус

Из общих теорем о векторных полях вытекает, что индекс особой точки (x_0, y_0) системы (13.24) совпадает с индексом особой точки линеаризованной системы (13.26), если у линеаризованной системы особая точка изолирована.

Оказывается, что общий характер расположения интегральных кривых в окрестности особой точки (см. рис. 13.11) не меняется при переходе от линейной системы (13.26) к нелинейной системе (13.24) для случаев, когда особая точка — седло, фо-

кус или узел (кроме специальных случаев²⁴). Центр при таком переходе может превратиться как в устойчивый, так и в неустойчивый фокус.

Если (x_0, y_0) не является изолированной особой точкой линеаризованной системы, то исследование точки (x_0, y_0) как особой точки нелинейной системы нужно производить, применяя результаты §§ 7 и 8.

Упражнение 13.2. Вычислить индекс нулевой особой точки следующих систем:

- 1) $\frac{dx}{dt} = e^x - e^y, \frac{dy}{dt} = 2x + y^2;$
- 2) $\frac{dx}{dt} = e^x - e^y, \frac{dy}{dt} = 2y + x^2;$
- 3) $\frac{dx}{dt} = \sin(x + y), \frac{dy}{dt} = \cos(x - y) - 1.$

В том случае, когда

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (13.27)$$

особая точка (x_0, y_0) нелинейной системы называется *простой*. Выше было показано, что индекс простых особых точек равен 1 или -1 . Если же $\Delta(x_0, y_0) = 0$, то особая точка называется *сложной*. Из результатов § 7 вытекает, что индекс сложной особой точки может принимать три значения: 1, -1 , 0, если функции P и Q непрерывно дифференцируемы и определитель $\Delta(x_0, y_0)$ имеет хотя бы один ненулевой элемент. Если же

$$P'_x(x_0, y_0) = P'_y(x_0, y_0) = Q'_x(x_0, y_0) = Q'_y(x_0, y_0) = 0,$$

то индекс определяется только членами высших порядков малости и может быть любым целым числом.

Упражнение 13.3.

1) Внутри замкнутого цикла системы есть три особые точки, все они простые. Доказать, что одна и только одна из них — седло.

2) Внутри замкнутого цикла есть шесть особых точек. Доказать, что среди них есть сложные особые точки.

Упражнение 13.4. Доказать, что система, указанная в упражнении 13.2. 2 не имеет периодических решений.

13.4. Признак неустойчивости состояния равновесия. Исходя из механических соображений, особую точку системы (13.1) называют также *состоянием равновесия* или *стационарной точкой*.

Состояние равновесия (x_0, y_0) называется *устойчивым по Ляпунову*, если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta > 0$, что каждая точка из круга

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta \quad (13.28)$$

при своем движении по траекториям системы (при возрастании t) не выйдет из круга

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon. \quad (13.29)$$

²⁴См. по этому поводу **Ф. Трикоми**, *Дифференциальные уравнения*, ИЛ, 1962, гл. 2.

Устойчивое по Ляпунову состояние равновесия называется *абсолютно* (или *асимптотически*) *устойчивым*, если круг (13.28) может быть выбран так, что его точки при движении по траекториям системы стремятся к (x_0, y_0) .

В дальнейшем нам будет удобно обозначать через $f(M, t)$ траекторию точки M ($f(M, t)$ — это точка, в которую перейдет M за время t , так что $f(M, 0) \equiv M$). Вектор-функция $f(M, t)$ непрерывна по совокупности переменных. Одно из ее основных свойств выражается равенством

$$f(f(M, t_1), t_2) = f(M, t_1 + t_2). \quad (13.30)$$

Лемма 13.1. *Пусть состояние равновесия $M_0 = (x_0, y_0)$ является изолированной особой точкой, устойчивой по Ляпунову и не обладает свойством абсолютной устойчивости. Тогда в каждой окрестности U точки M_0 есть цикл системы.*

Доказательство. Пусть U_0 — такая окрестность точки M_0 , которая вместе с замыканием лежит в U . Из устойчивости по Ляпунову вытекает, что окрестность U_0 может быть выбрана одновременно так, что траектории точек $M \in \overline{U_0}$ определены при всех $t \geq 0$.

Из условий леммы вытекает существование такой точки $M_1 \in U_0$, что $f(M_1, t)$ при возрастании t не выходит из U_0 и не стремится к M_0 . При этом, очевидно,

$$\inf_{t \geq 0} \rho(f(M_1, t), M_0) = r_0 > 0, \quad (13.31)$$

где через $\rho(P_1, P_2)$ обозначается расстояние между точками P_1 и P_2 .

Обозначим через t_n такую неограниченную последовательность моментов времени, что точки $f(M_1, t_n)$ сходятся к некоторой точке N . Из свойства (13.30) и из непрерывности вектор-функции $f(M, t)$ вытекает, что точки $f(M_1, t_n + T)$ при любом фиксированном T (положительном или отрицательном) будут сходить к $f(N, T)$. Это значит, что траектория точки N полностью лежит в окрестности U и находится на положительном расстоянии от состояния равновесия M_0 . Отсюда, в свою очередь, вытекает, что N не является особой точкой.

Оказывается, что траектория точки N — замкнутый цикл. Допустим, что это не так. Обозначим тогда через t'_n такую неограниченно возрастающую последовательность моментов времени, что точки $f(N, t'_n)$ сходятся к некоторой точке N^* . Точка N^* будет неособой. Аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 13.4, проведем через точку N^* отрезок без контакта и проследим, как могут быть расположены на этом отрезке точки, принадлежащие траекториям $f(M_1, t)$ и $f(N, t)$.

Каждая из этих траекторий пересекает отрезок без контакта бесконечное число раз. Пусть τ_1 и τ_2 — два таких последовательных момента, что $f(N, \tau_1)$ и $f(N, \tau_2)$ лежат на отрезке без контакта. Дуга траектории $f(N, t)$ и часть отрезка без контакта, соединяющие точки $f(N, \tau_1)$ и $f(N, \tau_2)$, ограничивают некоторую область $\Omega \subseteq U_0$. В силу теоремы 13.4 в Ω есть особая точка, она совпадает с M_0 .

Геометрически очевидно (см. рис. 13.8), что через отрезок без контакта либо все траектории входят, либо все выходят из области Ω . Отсюда вытекает, что точка

N^* не может быть расположена на отрезке без контакта между $f(N, \tau_1)$ и $f(N, \tau_2)$ — в противном случае N^* не была бы пределом точек $f(N, t'_n)$.

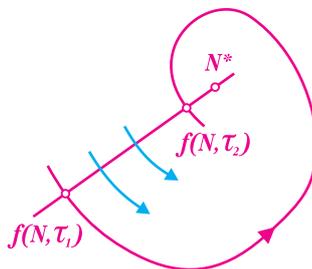


Рис. 13.12

Пусть через точки отрезка без контакта траектории входят в область Ω . Тогда N^* расположена относительно $f(N, \tau_1)$ и $f(N, \tau_2)$ так, как это показано на рис. 13.12, и, следовательно, точки $f(M, t)$ при больших t будут лежать внутри Ω . Отсюда вытекает, что точка $f(N, \tau_1)$ не является предельной для точек $f(M, t_n + \tau_1)$, и мы пришли к противоречию.

В случае, когда через отрезок без контакта траектории выходят из области Ω , рассуждение аналогично.

Лемма доказана.

Теорема 13.5. Если индекс особой точки (x_0, y_0) отличен от 1, то состояние равновесия (x_0, y_0) не обладает устойчивостью по Ляпунову.

Доказательство. Покажем, что устойчивая по Ляпунову особая точка имеет индекс, равный 1.

В случае, когда в каждой окрестности особой точки есть цикл, доказательство очевидно. Достаточно рассмотреть круговую окрестность, в которой нет других особых точек. Тогда точка (x_0, y_0) будет лежать внутри цикла (в противном случае в круге была бы, в силу теоремы 13.1, вторая особая точка). Индекс особой точки равен вращению поля скоростей на цикле, а это вращение равно 1.

Остается рассмотреть случай, когда циклов в малых окрестностях нет. Особая точка, в силу леммы 13.1, обладает свойством абсолютной устойчивости. Обозначим через $\Phi(M, t)$ векторное поле сдвигов по траекториям

$$\Phi(M, t) = f(M, t) - M. \quad (13.32)$$

Это поле будем рассматривать на окружностях малого радиуса.

При малых t векторы поля (13.32) направлены по хордам траекторий. Они не направлены противоположно векторам скорости. В силу теоремы 4.3 вращение полей (13.32) при малых t совпадает с вращением поля скоростей и равняется индексу особой точки (x_0, y_0) .

Векторные поля $\Phi(M, t)$ при $t > 0$ на малых окружностях с центром в (x_0, y_0) не обращаются в нуль, так как обращение в нуль такого поля означает существование цикла. Поэтому все векторные поля $\Phi(M, t)$ гомотопны друг другу и их вращение одинаково.

Из стремления $\rho(f(M, t), M_0)$ к нулю (для каждой фиксированной точки M окружности) и из устойчивости по Ляпунову вытекает, что $\rho(f(M, t), M_0)$ стремится при $t \rightarrow \infty$ к нулю равномерно относительно точек окружности (докажите!). Поэтому при больших t векторы полей (13.32) не направлены по внешней нормали к окружности. В силу той же теоремы 4.3 их вращение совпадает с вращением поля внутренних нормалей и равно 1.

Теорема доказана.

Упражнение 13.5. Доказать, что состояние равновесия системы, указанной в упражнении 13.2. 2, неустойчиво в смысле Ляпунова.

13.5. Уравнение второго порядка. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \quad (13.33)$$

Оно эквивалентно системе уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y), \quad (13.34)$$

для исследования которой применимы, в частности, соображения, изложенные в предыдущих пунктах²⁵.

Отметим некоторые особенности, вызванные специальным видом первого уравнения системы (13.34).

Все особые точки системы (13.34) лежат на оси абсцисс ($y = 0$). Эти особые точки определяются из уравнения

$$f(x, 0) = 0. \quad (13.35)$$

Интегральные кривые системы (13.34) в неособых точках оси абсцисс ортогональны этой оси.

Если система (13.34) имеет цикл, то движение по этому циклу, определенное системой (13.34), будет движением по ходу часовой стрелки.

Последнее замечание, которое мы сделаем, относится к определителю (13.27). Из вида первого уравнения системы (13.34) вытекает, что этот определитель имеет ненулевые элементы. Отсюда следует, что индекс изолированной особой точки системы (13.34) равен, вообще говоря, 1, -1 или нулю.

Упражнение 13.6. Доказать, что нулевое решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 - \sin x$$

неустойчиво.

²⁵Геометрические методы исследования уравнений с одной степенью свободы, к которым относится уравнение (13.33), весьма полно (и с большим числом приложений) изложены в известной книге **А. А. Андропова, А.А. Витта и С.Э. Хайкина** *Теория колебаний*, Физматгиз, 1959.

§ 14. Линейные краевые задачи

14.1. Угловая функция решения. В этом и следующих параграфах угловая функция применяется²⁶ для исследования решений системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y).\end{aligned}\tag{14.1}$$

Пусть

$$z(t) = (x(t), y(t))\tag{14.2}$$

— решение системы (14.1), определенное на отрезке $a \leq t \leq b$. Если это решение не обращается в нуль (то есть $x^2(t) + y^2(t) > 0$ при $a \leq t \leq b$), то при каждом t определен полярный угол $\phi(t)$ (рис. 14.1), который можно определить как непрерывную функцию. Функцию $\phi(t)$ будем называть *угловой функцией решения* $z(t)$. Отметим, что угловая функция решения $\phi(t)$ отличается от угловой функции $\theta(t)$ векторного поля (14.2) (в том смысле, как она была введена в § 1) аддитивным слагаемым: $\phi(t) = \phi(a) + \theta(t)$.

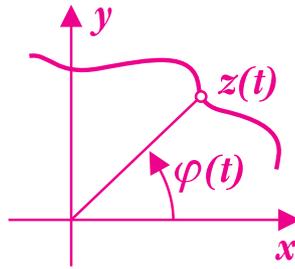


Рис. 14.1

В дальнейшем будут использованы следующие очевидные формулы:

$$x(t) = \|z(t)\| \cos \phi(t), \quad y(t) = \|z(t)\| \sin \phi(t) \quad \left(\|z(t)\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \right),$$

$$\phi(t) = \operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)},$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{\frac{dy(t)}{dt}x(t) - y(t)\frac{dx(t)}{dt}}{x^2(t) + y^2(t)}.$$

Поворот $\varkappa(t_1, t_2)$ решения (14.2) на отрезке $[t_1, t_2]$ определим формулой

$$\varkappa(t_1, t_2) = \phi(t_2) - \phi(t_1).\tag{14.3}$$

²⁶Отметим здесь три книги, в которых применяется угловая функция для исследования решений дифференциальных уравнений: Э.А. Коддингтон и Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, 1958; Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Физматгиз, 1961; Ф. Трикоми, *Дифференциальные уравнения*, ИЛ, 1962.

Поворот отличается от вращения множителем. Поворот обладает свойствами, аналогичными свойствам вращения

$$\varkappa(t_1, t_2) = -\varkappa(t_2, t_1), \quad \varkappa(t_1, t_2) = \varkappa(t_1, t_3) + \varkappa(t_3, t_2). \quad (14.4)$$

Упражнение 14.1.

1) Покажите, что поворот каждого ненулевого решения системы

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega x$$

на любом отрезке длины 1 одинаков. Вычислите этот поворот.

2) Покажите, что угловая функция решений системы

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t)x - \omega(t)y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega(t)x + \alpha(t)y \quad (14.5)$$

определяется равенством

$$\phi(t) = \phi(a) + \int_a^t \omega(\tau) d\tau.$$

К системе (14.1) частного вида приводит изучение уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0. \quad (14.6)$$

Перейдем от него к системе

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = g(t, x, -y). \quad (14.7)$$

Решение (14.2) этой системы имеет вид

$$z(t) = \left(x(t), -\frac{dx(t)}{dt}\right). \quad (14.8)$$

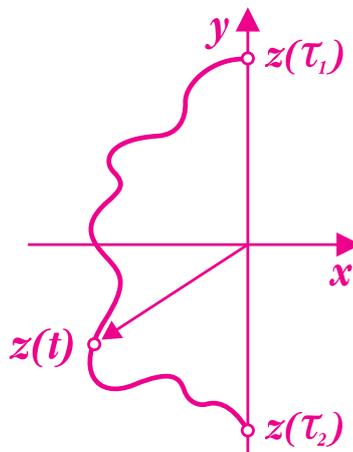


Рис. 14.2

Если решение (14.8) не обращается в нуль, то каждый нуль τ функции $x(t)$ будет изолирован, и поэтому на всем промежутке $[a, b]$ функция $x(t)$ обращается в нуль лишь конечное число раз. Пусть τ_1 и τ_2 — два соседних нуля функции $x(t)$. Нетрудно видеть (см. рис. 14.2), что на промежутке $[\tau_1, \tau_2]$ поворот решения равен π . Обозначим через $t_1 < \dots < t_n$ все нули функции $x(t)$ на $[a, b]$. Из (14.4) вытекает, что

$$\varkappa(t_1, t_n) = (n - 1)\pi. \quad (14.9)$$

На каждом из промежутков $[a, t_1]$ и $[t_n, b]$ поворот неотрицателен и меньше π .

Явное выражение угловой функции и поворота решения удается получить в редких случаях. Однако оценка поворота может быть получена для широких классов систем.

Рассмотрим, например, линейную систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}(t)x + a_{12}(t)y, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}(t)x + a_{22}(t)y. \end{aligned} \quad (14.10)$$

Угловая функция $\phi(t)$ решения этой системы удовлетворяет равенству

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{a_{21}(t)x^2 + (a_{22}(t) - a_{11}(t))xy - a_{12}(t)y^2}{x^2 + y^2}. \quad (14.11)$$

Предположим, что

$$m(t)(x^2 + y^2) \leq a_{21}(t)x^2 + (a_{22}(t) - a_{11}(t))xy - a_{12}(t)y^2 \leq M(t)(x^2 + y^2),$$

где $m(t), M(t)$ — некоторые непрерывные функции. Тогда

$$m(t) \leq \frac{d\phi(t)}{dt} \leq M(t),$$

откуда

$$\int_a^b m(t) dt \leq \phi(b) - \phi(a) = \varkappa(a, b) \leq \int_a^b M(t) dt. \quad (14.12)$$

Упражнение 14.2. Покажите, что в оценках (14.12) можно положить

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{a_{21} - a_{12} - \sqrt{(a_{21} + a_{12})^2 + (a_{22} - a_{11})^2}}{2}, \\ M(t) &= \frac{a_{21} - a_{12} + \sqrt{(a_{21} + a_{12})^2 + (a_{22} - a_{11})^2}}{2}. \end{aligned}$$

Упражнение 14.3 (М. Николеску). Пусть $a_{12}(t)a_{21}(t) < 0$. Покажите, что между двумя соседними нулями каждой компоненты решения $(x(t), y(t))$ системы (14.10) есть нуль другой компоненты.

Упражнение 14.4. Условия $a_{21}(t) \equiv -a_{12}(t)$, $a_{22}(t) \equiv a_{11}(t)$ необходимы и достаточны для того, чтобы повороты всех решений системы (14.10) на каждом фиксированном временном промежутке системы (14.10) на каждом были одинаковы. Докажите.

14.2. Дифференциальные и интегральные неравенства²⁷. Обозначим через $\psi(t)$ решение задачи

$$\frac{d\psi}{dt} = F(t, \psi), \quad \psi(a) = \psi_0, \quad (14.13)$$

определенное на отрезке $a \leq t \leq b$.

Теорема 14.1. Пусть функция $\phi(t)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\frac{d\phi(t)}{dt} > F(t, \phi(t)) \quad (a \leq t \leq b), \quad (14.14)$$

и пусть

$$\phi(a) > \psi(a). \quad (14.15)$$

Тогда

$$\phi(t) > \psi(t) \quad (a \leq t \leq b). \quad (14.16)$$

Доказательство вытекает из того факта, что график функции $\phi(t)$ в силу условия (14.14) не может касаться графика функции $\psi(t)$ и не может его пересекать, переходя сверху вниз (см. рис. 14.3).

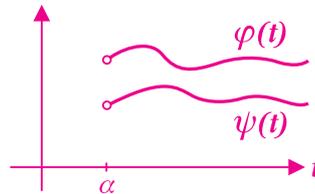


Рис. 14.3

Если условие (14.14) заменить неравенством

$$\frac{d\phi(t)}{dt} < F(t, \phi(t)),$$

а условие (14.15) неравенством

$$\phi(a) < \psi(a),$$

²⁷Первые теоремы о дифференциальных неравенствах установлены С.А. Чаплыгиным и О. Перроном. См. по этому поводу Дж. Сансоне, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, т. 2, ИЛ, 1954; М.А. Красносельский и А.И. Перов, *Дифференциальные и интегральные неравенства*, статья в справочнике *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Физматгаз (готовится к печати).

то, как легко видеть, будет выполняться неравенство

$$\phi(t) < \psi(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

В дальнейшем будем предполагать, что решение уравнения $\frac{d\psi}{dt} = F(t, \psi)$ единственно при любом начальном условии (и в сторону возрастания и в сторону убывания t).

Теорема 14.2. Пусть функция $\phi(t)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\frac{d\phi(t)}{dt} \geq F(t, \phi(t)) \quad (a \leq t \leq b),$$

и пусть

$$\phi(a) \geq \psi(a).$$

Тогда

$$\phi(t) \geq \psi(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

Доказательство. Обозначим через $\psi_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) какое-нибудь решение задачи

$$\frac{d\psi_n}{dt} = F(t, \psi_n) - \frac{1}{n}, \quad \psi_n(a) = \psi(a) - \frac{1}{n}.$$

В силу теоремы 14.1 имеет место неравенство

$$\phi(t) > \psi_n(t) \quad (a \leq t \leq b, n = 1, 2, \dots). \quad (14.17)$$

При $n \rightarrow \infty$ функции $\psi_n(t)$ сходятся к решению $\psi(t)$ задачи (14.13). Поэтому из (14.17) вытекает неравенство $\phi(t) \geq \psi(t)$. Проведение деталей доказательства предоставляем читателю.

Теорема 14.3. Пусть выполнены условия теоремы 14.2, причем для некоторой последовательности $t_n \rightarrow a + 0$ имеет место строгое неравенство

$$\frac{d\phi}{dt} > F(t, \phi(t)).$$

Тогда

$$\phi(t) > \psi(t) \quad (a < t \leq b). \quad (14.18)$$

Доказательство. Из условий теоремы непосредственно вытекает, что $\phi(t_n) > \psi(t_n)$. Обозначим через $\psi_n(t)$ решение задачи

$$\frac{d\psi_n(t)}{dt} = F(t, \psi_n), \quad \psi_n(t_n) = \phi(t_n).$$

Из теоремы 14.2 вытекает, что $\phi(t) \geq \psi_n(t)$ ($t_n \leq t \leq b$). Далее, в силу единственности решения $\psi_n(t) > \psi(t)$ ($t_n \leq t \leq b$). Поэтому $\phi(t) > \psi(t)$ ($a < t \leq b$). Теорема доказана.

Из доказательства теоремы видно, что для справедливости неравенства (14.18) достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\phi(a) > \psi(a), \quad \frac{d\phi(t)}{dt} \geq F(t, \phi(t)).$$

В тех случаях, когда функция $\phi(t)$ удовлетворяет интегральному неравенству типа

$$\phi(t) > \psi(a) + \int_a^t F(s, \phi(s)) ds \quad (a \leq t \leq b), \quad (14.19)$$

при некоторых ограничениях на функцию $F(t, \psi)$ также справедливо неравенство (14.16). Ограничимся формулировкой и доказательством утверждения, аналогичного теореме 14.1.

Теорема 14.4. Пусть непрерывная функция $\phi(t)$ удовлетворяет интегральному неравенству (14.19). Пусть функция $F(t, \psi)$ не убывает по ψ .

Тогда

$$\phi(t) > \psi(t) \quad (a \leq t \leq b). \quad (14.20)$$

Доказательство. Обозначим правую часть неравенства (14.19) через $\chi(t)$. Функция $\chi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 14.2:

$$\chi(a) = \psi(a), \quad \frac{d\chi(t)}{dt} = F(t, \phi(t)) \geq F(t, \chi(t)).$$

Тогда $\chi(t) \geq \psi(t)$, и, следовательно, $\phi(t) > \psi(t)$.

Теорема доказана.

Упражнение 14.5. Пусть функция $\phi(t)$ удовлетворяет интегральному неравенству (14.19). Сформулируйте и докажите аналоги теорем 14.2 и 14.3.

14.3 Теорема Штурма²⁸. Рассмотрим линейные системы

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y, \quad (14.21)$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y$$

и

$$\frac{dx}{dt} = b_{11}(t)x + b_{12}(t)y, \quad (14.22)$$

$$\frac{dy}{dt} = b_{21}(t)x + b_{22}(t)y$$

²⁸По поводу теорем, доказываемых в этом пункте, см. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Физматгиз, 1561.

с непрерывными коэффициентами.

Через $A(t)$ и $B(t)$ будем обозначать матрицы коэффициентов этих систем. Будем писать $A(t) \geq B(t)$, если при $-\infty < x, y < \infty$ выполнено неравенство

$$a_{21}(t)x^2 + (a_{22}(t) - a_{11}(t))xy - a_{12}(t)y^2 \geq b_{21}(t)x^2 + (b_{22}(t) - b_{11}(t))xy - b_{12}(t)y^2. \quad (14.23)$$

Будем писать $A(t) \gg B(t)$, если в (14.23) при $x^2 + y^2 > 0$ имеет место строгое неравенство.

Пусть $z(t) = (x(t), y(t))$ и $\zeta(t) = (\xi(t), \eta(t))$ — ненулевые решения соответственно систем (14.21) и (14.22), а $\phi(t)$ и $\psi(t)$ — их угловые функции (они, очевидно, определены для всех рассматриваемых значений t).

Теорема 14.5. Пусть выполнены неравенства

$$\phi(a) \geq \psi(a), \quad A(t) \geq B(t) \quad (a \leq t \leq b). \quad (14.24)$$

Тогда

$$\phi(t) \geq \psi(t) \quad (a \leq t \leq b). \quad (14.25)$$

Доказательство. Достаточно заметить, что в силу (14.11)

$$\frac{d\phi}{dt} = a_{21}(t) \cos^2 \phi + (a_{22}(t) - a_{11}(t)) \cos \phi \sin \phi - a_{12}(t) \sin^2 \phi,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = b_{21}(t) \cos^2 \psi + (b_{22}(t) - b_{11}(t)) \cos \psi \sin \psi - b_{12}(t) \sin^2 \psi \equiv F(t, \psi).$$

Правые части этих уравнений удовлетворяют условию Липшица по переменным ϕ и Ψ . Поэтому для написанных уравнений справедлива теорема единственности. Из (14.24) вытекает, что

$$\phi(a) \geq \psi(a), \quad \frac{d\phi(t)}{dt} \geq F(t, \phi(t)).$$

Из последних неравенств в силу теоремы 14.2 вытекает неравенство (14.25).

Теорема доказана.

Из теоремы 14.3 и из замечания к ней вытекает, что в условиях теоремы 14.5 имеет место неравенство $\phi(b) > \psi(b)$, если либо $\phi(a) > \psi(a)$, либо $A(t) \gg B(t)$ хотя бы при одном значении t из (a, b) .

Последнее утверждение можно усилить для специальных классов линейных систем.

Теорема 14.6. Пусть

$$a_{11}(t) - a_{22}(t) \equiv b_{11}(t) - b_{22}(t) \quad (14.26)$$

и

$$a_{21}(t) \geq b_{21}(t), \quad -a_{12}(t) \geq -b_{12}(t). \quad (14.27)$$

Пусть при некотором $t_* \in [a, b]$ в одном из соотношений (14.27) имеет место знак строгого неравенства, причем в другом неравенстве при $t = t_*$ по крайней мере один из членов отличен от нуля. Пусть, наконец,

$$\phi(a) \geq \psi(a). \quad (14.28)$$

Тогда

$$\phi(t) \geq \psi(t) \quad (a \leq t \leq b). \quad (14.29)$$

и

$$\phi(b) > \psi(b). \quad (14.30)$$

Доказательство. Неравенство (14.29) вытекает из теоремы 14.5. Для доказательства неравенства (14.30) в силу теоремы 14.3 достаточно показать, что в некоторой окрестности Δ точки t_* функции $\phi(t)$ и $\psi(t)$ не совпадают. Предположим противное. Тогда в окрестности точки t_* будет выполнено равенство $\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\psi}{dt}$, которое в силу (14.11) можно переписать в виде

$$a_{21}(t) \cos^2 \phi(t) - a_{12}(t) \sin^2 \phi(t) \equiv b_{21}(t) \cos^2 \phi(t) - b_{12}(t) \sin^2 \phi(t).$$

Пусть для определенности $a_{21}(t_*) > b_{21}(t_*)$. Тогда из последнего тождества вытекает, что $\cos^2 \phi(t) \equiv 0$ в окрестности Δ . Иначе говоря, $x(t) \equiv \xi(t) \equiv 0$ при $t \in \Delta$. Из (14.21) и (14.22) следует, что $a_{12}(t) \equiv b_{12}(t) \equiv 0$, и мы пришли к противоречию. Аналогично рассматривается случай, когда $-a_{12}(t_*) > -b_{12}(t_*)$.

Теорема доказана.

Теоремы 14.5 и 14.6 могут быть применены для изучения расположения нулей решений систем линейных уравнений.

Допустим, что поворот решения $z(t) = (x(t), y(t))$ линейной системы удовлетворяет неравенству

$$|\varkappa(a, b)| \geq \pi.$$

Геометрически очевидно, что в этом случае каждая из функций $x(t)$ и $y(t)$ на $[a, b]$ обращается в нуль по крайней мере один раз. Аналогично из неравенства

$$|\varkappa(a, b)| \geq k\pi$$

вытекает, что каждая из функций $x(t)$ и $y(t)$ имеет не менее k нулей на $[a, b]$. Поэтому оценки поворота решения являются одновременно оценками числа нулей компонент решения.

В некоторых случаях между числом нулей и поворотом может быть установлена более точная зависимость. Пусть выполнено условие

$$a_{12}(t) < 0 \quad (a \leq t \leq b). \quad (14.31)$$

В этом случае поворот решения на промежутке между соседними нулями функции $x(t)$ равен π . Этот факт очевиден, так как все решения пересекают ось ординат

при возрастании t так, как это показано на рис. 14.4. Поэтому, если $\chi(a, b) = k\pi$ и $x(a) \neq 0$, то $x(t)$ имеет точно k нулей на отрезке $[a, b]$.

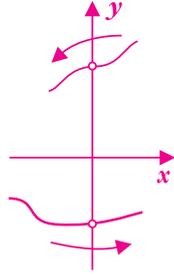


Рис. 14.4

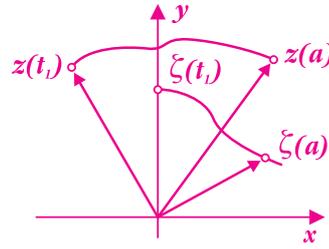


Рис. 14.5

Перейдем теперь к вопросу о взаимном расположении нулей решений двух линейных систем. Утверждения теорем 14.5 и 14.6 имеют простой геометрический смысл. Представим себе, что в плоскости расположены две стрелки, закрепленные в начале координат, которые могут вращаться и длина которых может изменяться. Конiec одной стрелки имеет координаты $(x(t), y(t))$, а другой $(\xi(t), \eta(t))$. Неравенство (14.25) означает, что движение стрелок подчинено строгому правилу: вторая стрелка не может перегонять первую стрелку в положительном направлении. Поэтому, если обе стрелки расположены так, как это показано на рис. 14.5, и если стрелка $\zeta(t)$, поворачиваясь в положительном направлении, в некоторый момент t_1 первый раз совпадает с осью ординат, то это значит, что стрелка $z(t)$ уже прошла через ось ординат в момент $\tau_1 \leq t_1$. Аналогично можно проследить за взаимным расположением других нулей функций $\xi(t)$ и $x(t)$.

Предоставляем читателю провести полное доказательство следующего утверждения:

Теорема 14.7. Пусть выполнены условия (14.26), (14.27) и

$$-a_{12}(t) \geq -b_{12}(t) > 0 \quad (a \leq t \leq b). \quad (14.32)$$

Пусть

$$\frac{y(a)}{x(a)} \geq \frac{\eta(a)}{\xi(a)}, \quad (14.33)$$

если $\xi(a) \neq 0$.

Обозначим через $t_1 < \dots < t_m$ все нули функции $\xi(t)$, лежащие в полуинтервале $[a, b]$.

Тогда $x(t)$ имеет в $[a, b]$ не менее m нулей $\tau_1 < \dots < \tau_m$ и $\tau_i \leq t_i$ ($i = 1, \dots, m$).

Заметим, что $\tau_i < t_i$, если на (a, t_i) выполнены все условия теоремы 14.6.

Упражнение 14.6. Покажите, что если в условиях теоремы 14.7 функции $x(t)$ и $\xi(t)$ имеют на (a, b) одинаковое число нулей, то $\frac{y(b)}{x(b)} \geq \frac{\eta(b)}{\xi(b)}$.

14.4. Об уравнениях второго порядка. Остановимся более подробно на линейных системах вида

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -p(t)y, \\ \frac{dy}{dt} &= q(t)x\end{aligned}\tag{14.34}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= -p_1(t)\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= q_1(t)\xi.\end{aligned}\tag{14.35}$$

Будем предполагать, что функции $p(t)$ и $p_1(t)$ положительны на отрезке $a \leq t \leq b$.

Теорема 14.8. Пусть выполнены неравенства

$$p(t) \geq p_1(t), \quad q(t) \geq q_1(t) \quad (a \leq t \leq b).\tag{14.36}$$

Пусть t_1 и t_2 — соседние нули функции $\xi(t)$.

Тогда $x(t)$ в каждом из полуинтервалов $(t_1, t_2]$ и $[t_1, t_2)$ имеет по крайней мере один нуль.

Доказательство. Эту теорему можно получить как следствие теоремы 14.7. Мы приведем прямое доказательство.

Предположим, что $x(t)$ не обращается в нуль на (t_1, t_2) . Без ограничения общности можно считать, что на (t_1, t_2) функции $x(t)$ и $\xi(t)$ отрицательны. Одновременно можно считать, что угловые функции $\phi(t)$ и $\psi(t)$ решений $(x(t), y(t))$ и $(\xi(t), \eta(t))$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} < \phi(t), \quad \psi(t) < \frac{3\pi}{2} \quad (t_1 < t < t_2), \\ \psi(t_1) &= \frac{\pi}{2}, \quad \psi(t_2) = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

Очевидно,

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{q(t)x^2 + p(t)y^2}{x^2 + y^2}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{q_1(t)\xi^2 + p_1(t)\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Из неравенств (14.36) и из теоремы 14.2 вытекает, что $\psi(t) \leq \phi(t)$. Поэтому $\phi(t_2) = \frac{3\pi}{2}$. Отсюда следует, что $\phi(t_1) = \frac{\pi}{2}$, так как в противном случае из теоремы 14.3 следовало бы неравенство $\phi(t_2) > \psi(t_2) = \frac{3\pi}{2}$.

Теорема доказана.

Эта теорема в общих курсах дифференциальных уравнений известна как теорема сравнения Штурма. Обычное ее аналитическое доказательство не сложнее того, которое мы привели.

В виде системы (14.34) может быть записано дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{p(t)} \frac{dx}{dt} \right) + q(t)x = 0,\tag{14.37}$$

если положить

$$y = -\frac{1}{p(t)} \frac{dx}{dt}.$$

Из теоремы 14.8 вытекает, что нули линейно независимых решений уравнения (14.37) перемежаются (разделяют друг друга).

Упражнение 14.7 (Пойя и Сёге). Пусть $x(a) = x(b) = 0$, $x(t) > 0$ ($a < t < b$) и $\frac{d^2x}{dt^2} + x > 0$. Докажите, что $b - a > \pi$.

Упражнение 14.8 (А.Ю. Левин). Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — решения соответственно уравнения $\frac{d^2x_1}{dt^2} + q_1(t)x_1 = 0$ и уравнения $\frac{d^2x_2}{dt^2} + q_2(t)x_2 = 0$. Пусть $x_1(t)$ не обращается в нуль на $[a, b]$ и выполнено неравенство

$$-\frac{\frac{dx_1(a)}{dt}}{x_1(a)} + \int_a^t q_1(\tau) d\tau \geq \left| -\frac{\frac{dx_2(a)}{dt}}{x_2(a)} + \int_a^t q_2(\tau) d\tau \right| \quad (a \leq t \leq b).$$

Покажите, что тогда $x_2(t)$ не обращается в нуль на $[a, b]$ и имеет место неравенство

$$-\frac{\frac{dx_1(t)}{dt}}{x_1(t)} \geq \left| -\frac{\frac{dx_2(t)}{dt}}{x_2(t)} \right| \quad (a \leq t \leq b).$$

14.5. Классы G_k . Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}(t)x + a_{12}(t)y, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}(t)x + a_{22}(t)y \end{aligned} \tag{14.38}$$

с краевыми условиями

$$x(a) \sin \alpha - y(a) \cos \alpha = 0, \quad x(b) \sin \beta - y(b) \cos \beta = 0. \tag{14.39}$$

Без ограничения общности можно считать, что $0 \leq \alpha < \pi$, $0 < \beta \leq \pi$.

Краевая задача (14.38)-(14.39) имеет нулевое решение. Будем называть краевую задачу *регулярной*, если она не имеет других решений. В дальнейшем краевые условия считаются фиксированными, поэтому можно говорить о регулярности матрицы $A(t)$ коэффициентов системы (14.38).

Краевая задача (14.38)-(14.39) имеет простой геометрический смысл: требуется найти решение $z(t) = (x(t), y(t))$ системы (14.38), которое при $t = a$ лежит на прямой $x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0$, а при $t = b$ — на прямой $x \sin \beta - y \cos \beta = 0$ (на рис. 14.6 изображено такое решение). Из однородности системы и краевых условий вытекает, что $cz(t)$ является решением краевой задачи, если $z(t)$ было решением этой задачи. Краевую задачу можно формулировать и в терминах угловой функции: $z(t)$ является решением краевой задачи, если некоторая его угловая функция или угловая функция решения $-z(t)$ удовлетворяет равенствам

$$\phi(a) = \alpha, \quad \phi(b) = \beta + k\pi, \tag{14.40}$$

где k — некоторое целое число. Таким образом, матрица $A(t)$ регулярна, если угловая функция $\phi(t)$ решений, начинающихся на прямой $x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0$, при $t = b$ принимает значение, отличное от $\beta + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), т.е.

$$\phi(b) \neq \beta \pmod{\pi}. \quad (14.41)$$

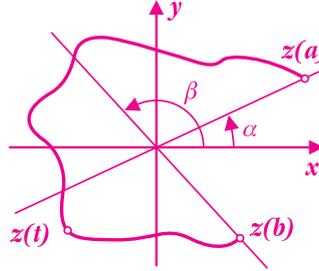


Рис. 14.6

Рассмотрим, например, систему

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega x. \quad (14.42)$$

Угловая функция $\phi(t)$ каждого ее решения имеет вид

$$\phi(t) = \phi(a) + \omega(t - a). \quad (14.43)$$

Разрешимость краевой задачи означает, что

$$\omega = \frac{k\pi + (\beta - \alpha)}{b - a}.$$

Задача будет регулярна, если

$$\omega \neq \frac{k\pi + (\beta - \alpha)}{b - a} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (14.44)$$

Упражнение 14.9. Покажите, что неоднородная система

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y + b_1(t),$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y + b_2(t)$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее краевым условиям (14.39), тогда и только тогда, когда матрица $A(t)$ регулярна.

Разобьем множество всех регулярных матриц на непересекающиеся классы. Пусть угловая функция $\phi(t)$ решения системы (14.38) с матрицей $A(t)$ удовлетворяет условиям

$$\phi(a) = \alpha, \quad \beta + k\pi < \phi(b) < \beta + (k + 1)\pi.$$

В этом случае будем говорить, что матрица $A(t)$ принадлежит классу G_k .

Из (14.43) вытекает, что матрица системы (14.42) принадлежит классу G_k , если

$$\frac{k\pi + (\beta - \alpha)}{b - a} < \omega < \frac{(k + 1)\pi + (\beta - \alpha)}{b - a}.$$

Рассмотрим три линейные системы, матрицы коэффициентов которых обозначим через $A_-(t)$, $A(t)$, $A_+(t)$. Будем предполагать, что

$$A_-(t) \leq A(t) \leq A_+(t). \quad (14.45)$$

Из теоремы 14.5 и из определения классов G_k вытекает

Теорема 14.9. *Если $A_-(t)$ и $A_+(t)$ принадлежат некоторому G_k , то и $A(t) \in G_k$.*

Упражнение 14.10. *Докажите, что каждый класс G_k является открытым и связным множеством.*

Рассмотрим более подробно краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = -p(t)y, \quad (14.46)$$

$$\frac{dy}{dt} = q(t)x$$

$$x(a) = x(b) = 0. \quad (14.47)$$

Матрица $A(t)$ в этом случае имеет специальный вид:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -p(t) \\ q(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (14.48)$$

а

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Для изучения краевой задачи (14.46)-(14.47) рассмотрим решение $z(t) = (x(t), y(t))$, удовлетворяющее начальному условию

$$x(a) = 0, \quad y(a) = 1. \quad (14.49)$$

Предположим, что коэффициенты p и q системы (14.46) постоянны.

Если $p = 0$, то $x(t) \equiv 0$ и матрица (14.48) нерегулярна. Если $q = 0$, то

$$x(t) = -p(t - a), \quad y(t) \equiv 1.$$

Поэтому знак поворота совпадает со знаком p , а абсолютная величина поворота меньше $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, матрица (14.48) принадлежит G_0 , если $p > 0$, и G_{-1} , если $p < 0$.

Если $pq > 0$, то решение $z(t)$ определится равенством

$$z(t) = \left(\frac{p}{\sqrt{pq}} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{pq}(t-a) \right), \sin \left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{pq}(t-a) \right) \right).$$

Угловая функция этого решения монотонно возрастает при положительном p и монотонно убывает при отрицательном p . Поэтому $\begin{pmatrix} 0 & -p \\ q & 0 \end{pmatrix} \in G_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), если

$$p > 0, \quad \frac{k\pi}{b-a} < \sqrt{pq} < \frac{(k+1)\pi}{b-a}. \quad (14.50)$$

Аналогично $\begin{pmatrix} 0 & -p \\ q & 0 \end{pmatrix} \in G_k$ ($k = -1, -2, \dots$), если

$$p < 0, \quad -\frac{k\pi}{b-a} > \sqrt{pq} > -\frac{(k+1)\pi}{b-a}. \quad (14.51)$$

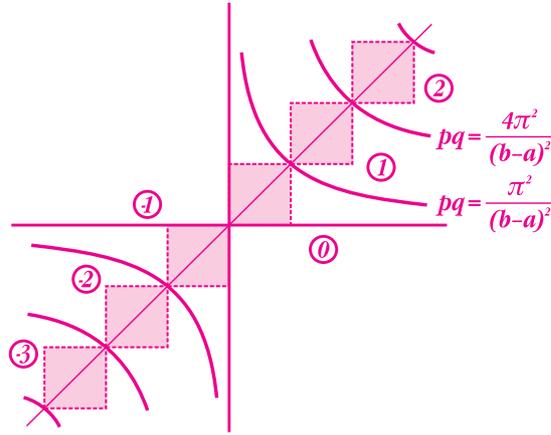


Рис. 14.7

Пусть теперь $pq < 0$. Тогда решение $z(t)$ определится равенством

$$z(t) = \left(-\frac{p}{\sqrt{-pq}} \operatorname{sh} (t-a), \operatorname{ch} \sqrt{-pq}(t-a) \right).$$

Нетрудно видеть, что знак поворота совпадает со знаком p , а его абсолютная величина меньше $\frac{\pi}{2}$. Поэтому матрица (14.48) принадлежит G_0 , если $p > 0$, и G_{-1} , если $p < 0$.

Все описанные случаи охватывает рис. 14.7. Цифры в кружочках обозначают номер класса G_k , которому принадлежит матрица (14.48).

Если коэффициенты системы (14.46) переменны, то удастся найти лишь достаточные признаки принадлежности матрицы классу G_k .

Введем обозначения

$$m(t) = \min \{p(t), q(t)\}, \quad M(t) = \max \{p(t), q(t)\}.$$

Из (14.12) вытекает, что

$$\int_a^b m(t) dt \leq \phi(t) - \alpha \leq \int_a^b M(t) dt.$$

Поэтому (14.48) принадлежит классу G_k , если

$$k\pi < \int_a^b m(t) dt, \quad \int_a^b M(t) dt < (k+1)\pi. \quad (14.52)$$

Этот критерий для постоянных матриц охватывает лишь те случаи, когда точка (p, q) лежит в одном из заштрихованных на рис. 14.7 квадратов.

Упражнение 14.11. Пусть $p(t) > 0$. Докажите следующие необходимые и достаточные условия принадлежности матрицы (14.48) классу G_0 :

1) (В.А. Кондратьев.) Существует непрерывно дифференцируемая функция $u(t)$, для которой

$$\frac{du}{dt} \leq -p(t)u^2 - q(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

2) (В.А. Кондратьев.) Существует положительная функция $v(t)$, которая удовлетворяет неравенству

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{p(t)} \frac{dv(t)}{dt} \right) + q(t)v(t) \leq 0.$$

3) (Дж. Сансоне.) Для любой абсолютно непрерывной отличной от тождественного нуля функции $v(t)$, обращающейся в нуль на концах отрезка и имеющей интегрируемую с квадратом производную, выполняется неравенство

$$\int_a^b \left(\frac{1}{p(t)} \left(\frac{dv(t)}{dt} \right)^2 - q(t)v^2(t) \right) dt > 0.$$

Упражнение 14.12. Рассмотрим матрицы

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & -p_1(t) \\ q_1(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & -p_2(t) \\ q_2(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $p_1(t), p_2(t) > 0$. Докажите следующие утверждения:

1) Если $A_1(t), A_2(t) \in G_0$, то G_0 принадлежит матрица

$$A_\sigma(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{p_1(t)p_2(t)}{\sigma p_2(t) + (1-\sigma)p_1(t)} \\ \sigma q_1(t) + (1-\sigma)q_2(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (0 \leq \sigma \leq 1).$$

2) Если $A_2(t) \leq A_1(t)$ и $A_1(t) \in G_0$, то $A_2(t) \in G_0$.

Полезно иметь в виду, что общие краевые условия вида (14.39) могут быть приведены к одному из следующих канонических видов:

$$\xi(a) = 0, \quad \eta(b) = 0 \quad (14.53)$$

или

$$\eta(a) = 0, \quad \xi(b) = 0. \quad (14.54)$$

К условиям (14.53) можно перейти в случае, когда прямые

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0, \quad x \sin \beta - y \cos \beta = 0 \quad (14.55)$$

различны. Для этого достаточно положить

$$\xi = x \sin \alpha - y \cos \alpha, \quad \eta = x \sin \beta - y \cos \beta.$$

Если же прямые (14.55) совпадают, то можно положить

$$\xi = x \sin \alpha - y \cos \alpha, \quad \eta = x \cos \alpha + y \sin \alpha.$$

14.6. Задача о собственных значениях.²⁹ Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}(t, \lambda)x + a_{12}(t, \lambda)y, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}(t, \lambda)x + a_{22}(t, \lambda)y, \end{aligned} \quad (14.56)$$

коэффициенты которой зависят от вещественного параметра λ . Предполагается, что эти коэффициенты непрерывны по совокупности переменных $a \leq t \leq b$, $-\infty < \lambda < \infty$. Будем изучать эту систему при краевых условиях

$$x(a) \sin \alpha - y(a) \cos \alpha = 0, \quad x(b) \sin \beta - y(b) \cos \beta = 0. \quad (14.57)$$

Число λ_* называется *собственным значением* задачи (14.56)-(14.57), если при $\lambda = \lambda_*$ она имеет решение, отличное от нулевого. Очевидно, это решение единственно с точностью до постоянного множителя. Совокупность собственных значений образует *спектр* задачи.

Ненулевое решение $z(t) = (x(t), y(t))$ краевой задачи называют *собственной вектор-функцией* или просто *собственной функцией*, соответствующей данному собственному значению.

Через $\phi(t, \lambda)$ будем обозначать угловую функцию решения системы (14.56), удовлетворяющего начальному условию

$$x(a) = \cos \alpha, \quad y(a) = \sin \alpha.$$

Будем считать, что $\phi(a, \lambda) \equiv \alpha$.

Собственные значения краевой задачи (14.56)-(14.57) можно определить как решения уравнения

$$\phi(b, \lambda) = \beta + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (14.58)$$

²⁹См. Дж. Сансоне, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, т. 1. ИЛ, 1954,

Иначе говоря, собственные значения — это абсциссы точек пересечения графика функции $\phi = \phi(b, \lambda)$ с прямыми $\phi = \beta + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) (см. рис. 14.8).

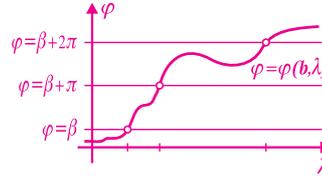


Рис. 14.8

Рассмотрим, например, систему

$$\frac{dx}{dt} = -(\lambda + \omega)y, \quad \frac{dy}{dt} = (\lambda + \omega)x.$$

Из (14.43) вытекает, что $\phi(t, \lambda) = \alpha + (\omega + \lambda)(t - a)$. Поэтому $\phi(b, \lambda) = \alpha + (\omega + \lambda)(b - a)$, откуда следует, что краевая задача имеет счетное число собственных значений

$$\lambda_k = \frac{(\beta - \alpha) + k\pi}{b - a} - \omega \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Вернемся к рассмотрению произвольной системы (14.56). Допустим, что при двух значениях λ_* и λ_{**} параметра λ матрица $A(t, \lambda)$ коэффициентов системы принадлежит классам G_{k_*} и $G_{k_{**}}$, причем $k_* \neq k_{**}$. Это значит, что при изменении λ от λ_* до λ_{**} функция $\phi(b, \lambda)$ принимает по крайней мере один раз значение, равное β по mod π . Более того, если $|k_* - k_{**}| = n$, то таких значений будет не меньше чем n . Отсюда вытекает

Лемма 14.1. Пусть $A(t, \lambda_*) \in G_{k_*}$, $A(t, \lambda_{**}) \in G_{k_{**}}$ и $|k_* - k_{**}| = n$. Тогда краевая задача (14.56)-(14.57) на интервале $(\lambda_*, \lambda_{**})$ имеет по крайней мере n собственных значений.

Проверка условий этой леммы во многих случаях проводится без труда. Приведем пример.

Предположим, что коэффициенты системы (14.56) удовлетворяют неравенствам

$$m(\lambda)(x^2 + y^2) \leq a_{21}(t, \lambda)x^2 + (a_{22}(t, \lambda) - a_{11}(t, \lambda))xy - a_{12}(t, \lambda)y^2 \leq M(\lambda)(x^2 + y^2). \quad (14.59)$$

Теорема 14.10. Пусть

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} m(\lambda) = +\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} M(\lambda) = -\infty. \quad (14.60)$$

Тогда спектр задачи (14.56)-(14.57) содержит как положительные, так и отрицательные собственные значения, сколь угодно большие по абсолютной величине.

Доказательство. Условие (14.59) означает, что

$$A_-(\lambda) \leq A(t, \lambda) \leq A_+(\lambda),$$

где

$$A_-(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -m(\lambda) \\ m(\lambda) & 0 \end{pmatrix}, \quad A_+(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -M(\lambda) \\ M(\lambda) & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\phi_-(t, \lambda)$, $\phi(t, \lambda)$ и $\phi_+(t, \lambda)$ угловые функции решений системы с матрицами коэффициентов $A_-(\lambda)$, $A(t, \lambda)$ и $A_+(\lambda)$, удовлетворяющие начальному условию

$$\phi_-(a, \lambda) = \phi(a, \lambda) = \phi_+(a, \lambda) = \alpha.$$

Из теоремы 14.5 вытекает, что

$$\phi_-(b, \lambda) \leq \phi(b, \lambda) \leq \phi_+(b, \lambda),$$

то есть в силу (14.43)

$$m(\lambda)(b - a) \leq \phi(b, \lambda) - \alpha \leq M(\lambda)(b - a).$$

Из первого условия (14.60) вытекает существование таких $\lambda_k \rightarrow +\infty$, что $A(t, \lambda_k) \in G_k$, где $k \rightarrow \infty$. Аналогично из второго условия (14.60) следует существование такой последовательности $\lambda'_k \rightarrow -\infty$, что $A(t, \lambda'_k) \in G_{k'}$, где $k' \rightarrow -\infty$. Остается воспользоваться леммой 14.1.

Теорема доказана.

Если в условиях теоремы 14.10 функция $\phi(b, \lambda)$ строго монотонна, то каждое из уравнений (14.58) имеет единственное решение. Это позволяет перенумеровать собственные значения краевой задачи.

Из замечания, приведенного после доказательства теоремы 14.5, вытекает условие строгого возрастания функции $\phi(b, \lambda)$ достаточно, чтобы из $\lambda < \mu$ вытекало неравенство $A(t, \lambda) \leq A(t, \mu)$ ($a \leq t \leq b$), в котором хотя бы при одном t имеет место знак строгого неравенства.

Упражнение 14.13 (Гурвиц). Покажите, что спектр краевой задачи для системы

$$\frac{dx}{dt} = -(\lambda + r(t))y, \quad \frac{dy}{dt} = (\lambda + s(t))x$$

(при краевых условиях (14.57)) образует последовательность

$$\dots < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots,$$

причем $\lambda_{-k} \rightarrow -\infty$, $\lambda_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$.

14.7. Задача Штурма-Лиувилля³⁰. В этом пункте мы более подробно изучим краевую задачу для систем вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= r(t, \lambda)x - p(t, \lambda)y, \\ \frac{dy}{dt} &= q(t, \lambda)x + t(t, \lambda)y. \end{aligned} \tag{14.61}$$

³⁰См., например, **И.Г. Петровский**, *Лекции об уравнениях с частными производными*, Физматгиз, 1961; **Дж. Сансоне**, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, т. 1, ИЛ, 1954; **Э.А. Коддингтон** и **Н. Левинсон**, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, 1959.

К изучению частных классов таких систем с краевыми условиями (14.57) приводит³¹ задача Штурма-Лиувилля о собственных значениях краевой задачи

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{p(t, \lambda)} \frac{dx}{dt} \right) + q(t, \lambda)x = 0, \quad (14.62)$$

$$\begin{aligned} x(a) \sin \alpha + \frac{dx(a)}{dt} \frac{1}{p(a, \lambda)} \cos \alpha &= 0, \\ x(b) \sin \beta + \frac{dx(b)}{dt} \frac{1}{p(b, \lambda)} \cos \beta &= 0. \end{aligned} \quad (14.63)$$

В дальнейшем предполагается, что

$$p(t, \lambda) \geq p > 0. \quad (14.64)$$

Теорема 14.11. Пусть функции $p(t, \lambda)$ и $q(t, \lambda)$ не убывают по λ , причем для каждой пары чисел $\lambda < \mu$ найдется такое τ , что либо $q(\tau, \lambda) < q(\tau, \mu)$, либо $p(\tau, \lambda) < p(\tau, \mu)$ и по крайней мере одно из чисел $q(\tau, \lambda)$ и $q(\tau, \mu)$ отлично от нуля. Пусть

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} q(t, \lambda) = +\infty. \quad (14.65)$$

Тогда собственные значения краевой задачи (14.61)-(14.57) образуют возрастающую последовательность

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty. \quad (14.66)$$

Доказательство. Для исследования краевой задачи, как обычно, рассмотрим функцию $\phi(b, \lambda)$. Из теоремы 14.6 и из первого условия доказываемой теоремы вытекает, что $\phi(b, \lambda)$ строго возрастает по λ . Поэтому доказательство будет завершено, если будет показано, что $\phi(b, \lambda) \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и $\phi(b, \lambda)$ ограничена снизу.

Положим

$$q(\lambda) = \min_{a \leq t \leq b} q(t, \lambda).$$

Тогда матрица $A(t, \lambda)$ коэффициентов системы (14.61) удовлетворяет неравенству $A(t, \lambda) \geq B(\lambda)$, где

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ q(\lambda) & 0 \end{pmatrix}, \quad (14.67)$$

и в силу теоремы 14.5

$$\phi(b, \lambda) \geq \psi(b, \lambda),$$

где $\psi(b, \lambda)$ — угловая функция для системы, коэффициенты которой определяются матрицей (14.67). Из неравенств (14.50) вытекает, что $\psi(b, \lambda) \rightarrow +\infty$, если $q(\lambda) \rightarrow$

³¹Достаточно ввести обозначение $\frac{dx}{dt} = -p(t, x)y$. При этом, естественно, $r(t, \lambda) \equiv 0$.

$+\infty$. Последнее соотношение выполняется в силу (14.65). Таким образом, $\phi(b, \lambda) \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Покажем теперь, что $\phi(b, \lambda) \geq -\frac{\pi}{2}$. Действительно,

$$\frac{d\phi(t, \lambda)}{dt} = q(t, \lambda) \cos^2 \phi + p(t, \lambda) \sin^2 \phi, \quad (14.68)$$

а функция $\psi(t) \equiv -\frac{\pi}{2}$ удовлетворяет неравенствам

$$\psi(a) < \phi(a, \lambda) = \alpha, \quad \frac{d\psi}{dt} \leq q(t, \lambda) \cos^2 \psi + p(t, \lambda) \sin^2 \psi.$$

Остается применить теорему 14.2.

Теорема доказана.

Теорема 14.12. Пусть выполнены условия теоремы 14.11, и пусть равномерно относительно $t \in [a, b]$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{q(t, \lambda)}{p(t, \lambda)} = -\infty. \quad (14.69)$$

Тогда первая компонента $x_n(t)$ собственной функции $z_n(t) = (x_n(t), y_n(t))$, отвечающей собственному значению λ_n , имеет точно $n - 1$ нуль в интервале (a, b) . Нули $x_n(t)$ разделяют нули $x_{n+1}(t)$.

Доказательство. Покажем вначале, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \phi(b, \lambda) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi. \end{cases} \quad (14.70)$$

Пусть $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$. Выберем такое $\varepsilon > 0$, что $\alpha < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Пусть

$$\delta = \min_{|\phi| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon} \cos^2 \phi$$

и положительное число N удовлетворяет неравенству

$$p(N\delta - 1) > \frac{\pi}{b - a}.$$

В силу условия (14.69) можно указать такое λ_0 , что при $\lambda < \lambda_0$ выполняется неравенство

$$\frac{q(t, \lambda)}{p(t, \lambda)} < -N \quad (a \leq t \leq b). \quad (14.71)$$

Тогда при $a \leq t \leq b$, $|\phi| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ и $\lambda < \lambda_0$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(t, \lambda)}{dt} &= q(t, \lambda) \cos^2 \phi + p(t, \lambda) \sin^2 \phi \leq -Np(t, \lambda)\delta + p(t, \lambda) = \\ &= -p(t, \lambda)(N\delta - 1) \leq -p(N\delta - 1) < -\frac{\pi}{b - a}. \end{aligned} \quad (14.72)$$

Из последнего неравенства мы получаем, что

$$\phi(t, \lambda) - \alpha < -\frac{\pi}{b-a}(t - \alpha)$$

до тех пор, пока $|\phi(t, \lambda)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Так как

$$\alpha - \frac{\pi}{b-a}(b-a) = \alpha - \pi < -\frac{\pi}{2} + \varepsilon,$$

то при некотором значении τ ($a < \tau < b$) $\phi(\tau, \lambda) = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$, и в силу (14.72) $\phi(t, \lambda) < -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ при $\tau < t \leq b$. С другой стороны, всегда выполнено неравенство $\phi(t, \lambda) \geq -\frac{\pi}{2}$, так как $\frac{d\phi}{dt} > 0$, если $\phi = -\frac{\pi}{2}$. Поэтому при $\lambda < \lambda_0$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \phi(b, \lambda) < -\frac{\pi}{2} + \varepsilon.$$

Тем самым наше утверждение доказано. Аналогично рассматривается случай $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$.

Каждую из прямых $\phi = \beta + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), лежащую выше прямой $\phi = -\frac{\pi}{2}$ в случае $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ и прямой $\phi = \frac{\pi}{2}$ в случае $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$, кривая $\phi = \phi(b, \lambda)$ пересекает при единственном значении λ . Занумеруем эти собственные значения в порядке возрастания $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$. Ясно, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$.

Покажем, что $x_n(t)$ имеет точно $n - 1$ нуль в интервале (a, b) . Снова для определенности положим $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$. Согласно определению собственных значений $\phi(b, \lambda_n) \in \left(-\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi, -\frac{\pi}{2} + n\pi\right]$. Так как $\phi(a, \lambda_n) = \alpha < \frac{\pi}{2}$, то в силу теоремы Больцано функция $\phi(t, \lambda_n)$ при некоторых t_1, \dots, t_{n-1} ($a < t_1 < \dots < t_{n-1} < b$) принимает значения $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi, \dots, \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi$. Это означает, что t_1, \dots, t_{n-1} — нули $x_n(t)$. Других нулей в (a, b) нет, так как $\frac{d\phi}{dt} > 0$ при $\phi = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

Докажем последнее утверждение теоремы: нули $\tau_1 < \dots < \tau_n$ функции $x_{n+1}(t)$ разделяют нули $t_1 < \dots < t_{n-1}$ функции $x_n(t)$. В условиях теоремы имеют место неравенства

$$\phi(t, \lambda_n) < \phi(t, \lambda_{n+1}) < \phi(t, \lambda_n) + \pi \quad (a < t < b). \quad (14.73)$$

Первое из них вытекает из строгого возрастания $\phi(t, \lambda)$ по λ . Второе неравенство доказывается несколько сложнее. При t близких к a , оно очевидно. Если бы оно не выполнялось при некотором $t = \tau$, то в силу теоремы 14.3

$$\phi(t, \lambda_{n+1}) > \phi(t, \lambda_n) + \pi \quad (\tau < t \leq b),$$

и, следовательно, $\phi(t, \lambda_{n+1}) > \phi(b, \lambda_n)$, что противоречит определению собственного значения. Отметим, что здесь использован тот факт, что $\phi(t, \lambda_n) + \pi$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и $\phi(t, \lambda_n)$.

Из неравенств (14.73) при $t = t_k$ получаем

$$\phi(t_k, \lambda_n) = \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi < \phi(t_k, \lambda_{n+1}) < \phi(t_k, \lambda_n) + \pi = \frac{\pi}{2} + \pi. \quad (14.74)$$

Это значит, что $\tau_k < t_k < \tau_{k+1}$.

Теорема доказана.

Условия теоремы 14.12 заведомо выполнены, если

$$p(t, \lambda) \equiv p(t) > 0, \quad q(t, \lambda) = a_0(t) + a_1(t)\lambda + \dots + a_m(t)\lambda^{2m-1},$$

где коэффициенты $a_1(t), \dots, a_m(t)$ неотрицательны, а сумма их положительна.

Упражнение 14.14 (И.Г. Петровский). Пусть $0 < \underline{p} \leq p(t) \leq \bar{p}$, $q(t, \lambda) = \lambda r(t) + f(t)$ и $0 < \underline{r} \leq r(t) \leq \bar{r}$, $\underline{f} \leq f(t) \leq \bar{f}$. Тогда для собственных значений задачи

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{p(t)} \frac{dx}{dt} \right) + (\lambda r(t) + f(t))x = 0$$

справедливы неравенства

$$\frac{1}{\bar{p}} \frac{k^2 \pi^2}{(b-a)^2} - \bar{f} \leq \lambda_k \leq \frac{1}{\underline{p}} \frac{k^2 \pi^2}{(b-a)^2} - \underline{f} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Упражнение 14.15 (Путнам). Покажите, что при выполнении неравенства

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^2 (f(t) + f(1-t)) dt > 1$$

краевая задача $\frac{d^2 x}{dt^2} + (\lambda + f(t))x = 0$, $x(0) = x(1) = 0$, имеет отрицательное собственное значение.

14.8. Об устойчивости собственных значений краевой задачи. Назовем собственное значение λ_0 краевой задачи (14.56)-(14.57) *устойчивым*, если по любым положительным числам ε и E можно указать такое $\delta > 0$, что из неравенств

$$|\bar{a}_{ij}(t) - a_{ij}(t)| \leq \delta \quad (a \leq t \leq b, |\lambda - \lambda_0| < E) \quad (14.75)$$

вытекает существование у краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = \bar{a}_{11}(t, \lambda)x + \bar{a}_{12}(t, \lambda)y, \quad (14.76)$$

$$\frac{dy}{dt} = \bar{a}_{21}(t, \lambda)x + \bar{a}_{22}(t, \lambda)y,$$

$$x(a) \sin \alpha - y(a) \cos \alpha = 0, \quad x(b) \sin \beta - y(b) \cos \beta = 0 \quad (14.77)$$

собственного значения $\bar{\lambda}_0$ удовлетворяющего неравенству

$$|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0| < \varepsilon.$$

Упражнение 14.16. Краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = e^{-\lambda^2} y, \quad \frac{dy}{dt} = e^{-\lambda^2} x, \quad x(0) = x(\pi) = 0$$

имеет единственное собственное значение $\lambda_0 = 0$. Покажите, что оно неустойчиво.

Предоставляем читателю показать, что собственное значение λ_0 устойчиво тогда и только тогда, когда λ_0 не является точкой локального экстремума функции $\phi(b, \lambda)$.

§ 15. Нелинейные краевые задачи³²

15.1. Вспомогательные предложения. В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства решений системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y). \end{aligned} \tag{15.1}$$

часть из которых мы приведем с доказательствами.

Мы будем рассматривать систему (15.1) в предположении, что функции $f(t, x, y)$ и $g(t, x, y)$ непрерывны по совокупности переменных в области $D : a \leq t \leq b, -\infty < x, y < +\infty$. Это, как хорошо известно, обеспечивает существование решения системы (15.1), удовлетворяющего начальному условию

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \tag{15.2}$$

однако не гарантирует его единственности³³. Кроме того, это решение может не допускать продолжения на весь отрезок $a \leq t \leq b$.

В этом параграфе мы будем рассматривать такие системы (15.1), все решения которых продолжимы на отрезок $a \leq t \leq b$. Если, кроме того, предполагать, что решение системы однозначно определяется начальными условиями (15.2), то для понимания дальнейшего достаточно ознакомиться лишь с утверждениями лемм 15.1 и 15.2.

³²Результаты этого параграфа в основном получены **А.И. Перовым**. См. **А.И. Перов**, *Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений*, гл. 2, диссертация, Воронежский государственный университет, 1959; *О двухточечной краевой задаче*, ДАН СССР **122** (1958), №6; *О краевой задаче для системы двух дифференциальных уравнений*, ДАН СССР **144** (1962), №3.

Нелинейным краевым задачам посвящена значительная литература. См. по этому поводу **Э. Камке**, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Физматгиз, 1961; **Дж. Сансоне**, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, т. 2, ИЛ, 1954.

³³Если решения системы (15.1) однозначно определяются начальными условиями (15.2), то дальнейшие построения упрощаются.

Теорема 15.1, которую мы приводим ниже, предполагает знакомство читателя с элементами функционального анализа (метрические пространства, компактность, связность и т. д.). Эту теорему мы приведем без доказательства.

Теорема 15.1 (М. Хукухара). Пусть S — ограниченное замкнутое связное множество области D . Пусть все решения системы (15.1) могут быть продолжены на весь отрезок $a \leq t \leq b$.

Тогда совокупность решений системы (15.1), проходящих через точки множества S и определенных на всем отрезке $a \leq t \leq b$, является компактным и связным множеством в пространстве $C[a, b]$ непрерывных на $a \leq t \leq b$ вектор-функций³⁴.

Каждое решение задачи (15.1)-(15.2) будем записывать в виде $z(t, z_0) = (x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0))$, если $z_0 = (x_0, y_0)$ и $t_0 = a$.

Лемма 15.1. Пусть любое решение системы (15.1) продолжимо на весь отрезок $a \leq t \leq b$.

Тогда можно указать такие функции $m(u)$ и $M(u)$, что

$$m(\|z_0\|) \leq \|z(t, z_0)\| \leq M(\|z_0\|), \quad (15.3)$$

причем

$$\lim_{u \rightarrow \infty} m(u) = +\infty. \quad (15.4)$$

Доказательство. Из теоремы 15.1 вытекает, что функция $M(u)$ может быть определена равенством

$$M(u) = \sup_{a \leq t \leq b, \|z_0\| \leq u} \|z(t, z_0)\|. \quad (15.5)$$

Покажем, что функция $m(u)$, определяемая равенством

$$m(u) = \inf_{a \leq t \leq b, \|z_0\| \geq u} \|z(t, z_0)\|, \quad (15.6)$$

удовлетворяет условию (15.4). Пусть задано $r_0 > 0$. Рассмотрим все решения системы (15.1), проходящие через точки множества $S : a \leq t \leq b, \|z_0\| \leq r_0$. В силу теоремы 15.1 можно указать такое число u_0 , что $\|z(t)\| \leq u_0$ для любого рассматриваемого нами решения. Нетрудно видеть, что решение $z(t, z_0)$ с $\|z_0\| > u_0$ удовлетворяет неравенству $\|z(t, z_0)\| > r_0$. Поэтому в силу определения функции $m(u)$ получаем, что $m(u) \geq r_0$ при $u > u_0$.

Лемма доказана.

Напомним, что угловой функцией $\phi(t)$ решения $z(t) = (x(t), y(t))$ системы (15.1), не обращающегося в нуль, называется полярный угол вектора $z(t)$ ($\phi(t)$ — непрерывная функция). Пусть $\zeta(t) = (\xi(t), \eta(t))$ — другое решение системы (15.1), угловую функцию которого обозначим через $\psi(t)$.

³⁴Masuo Hukuhara, Proc. Japan. Acad. **29** (1953), 154; см. также М.А. Красносельский и А.И. Перов, О существовании решений у некоторых нелинейных операторных уравнений, ДАН СССР **126** (1959), №1.

Лемма 15.2. Пусть выполнены неравенства

$$\|z(t) - \zeta(t)\| \leq M, \quad \|z(t)\| \geq m \quad (a \leq t \leq b), \quad (15.7)$$

где

$$M < m. \quad (15.8)$$

Пусть

$$|\phi(a) - \psi(a)| < \pi \frac{M}{m}. \quad (15.9)$$

Тогда

$$|\phi(t) - \psi(t)| < \pi \frac{M}{m} \quad (a \leq t \leq b). \quad (15.10)$$

Доказательство. Обозначим через $z_0(t)$ и $\zeta_0(t)$ нормированные вектор-функции, соответствующие $z(t)$ и $\zeta(t)$. Так как

$$\|z_0(t) - \zeta_0(t)\| = \left\| \frac{z(t)}{\|z(t)\|} - \frac{\zeta(t)}{\|\zeta(t)\|} \right\| \leq \frac{2\|z(t) - \zeta(t)\|}{\|z(t)\|},$$

то

$$\|z_0(t) - \zeta_0(t)\| \leq 2 \frac{M}{m}. \quad (15.11)$$

Предположим, что неравенство (15.10) не выполнено. Пусть t_0 — то значение t , при котором

$$|\phi(t_0) - \psi(t_0)| = \pi \frac{M}{m}. \quad (15.12)$$

Геометрически ясно, что

$$\left| \sin \frac{\phi(t_0) - \psi(t_0)}{2} \right| = \frac{1}{2} \|z_0(t_0) - \zeta_0(t_0)\|.$$

Воспользовавшись элементарным неравенством $|\sin \alpha| > \frac{2}{\pi} |\alpha|$ ($0 < |\alpha| < \frac{\pi}{2}$), из (15.12) получаем

$$\|z_0(t_0) - \zeta_0(t_0)\| > \frac{2}{\pi} |\phi(t_0) - \psi(t_0)| = 2 \frac{M}{m}.$$

Это противоречит неравенству (15.11).

Лемма доказана.

Из этой леммы вытекает простое следствие. Пусть $\phi_n(t)$ — угловые функции решений $z_n(t)$; пусть вектор-функции $z_n(t)$ равномерно на $[a, b]$ сходятся к $z(t)$, причем $z(t) \neq 0$ при $a \leq t \leq b$; наконец, пусть, $\phi_n(a) \rightarrow \phi_0$. Тогда $\phi_n(t)$ равномерно сходятся к угловой функции $\phi(t)$ решения $z(t)$, удовлетворяющей условию $\phi(a) = \phi_0$.

Через $\phi(t, z_0)$ обозначим угловую функцию любого решения системы (15.1), удовлетворяющего начальному условию (15.2). Так как одному и тому же начальному

условию могут соответствовать разные решения, то обозначение $\phi(t, z_0)$ относится к целому семейству угловых функций. В дальнейшем рассматриваются решения $z(t, z_0)$ с начальными условиями из некоторого сектора Σ (см. рис. 15.1) с вершиной в нулевой точке. Это позволяет нам в дальнейшем считать, что значения $\phi(a, z_0)$ принадлежат некоторому промежутку (α_1, α_2) , где $|\alpha_2 - \alpha_1| < \pi$.

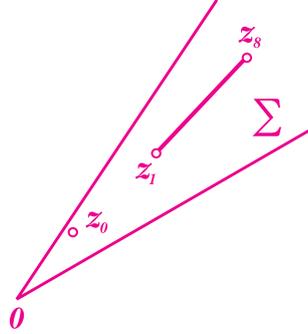


Рис. 15.1

Совокупность значений всех угловых функций $\phi(t, z_0)$ при фиксированных t и z_0 будем обозначать через $\tilde{\phi}(t, z_0)$. Функция $\tilde{\phi}(t, z_0)$ при $t = a$ однозначна, а при $t > a$, вообще говоря, многозначна.

Предположим, что все решения системы (15.1) продолжимы на отрезок $a \leq t \leq b$. Изучим некоторые свойства многозначной функции $\tilde{\phi}(t, z_0)$, считая ее определенной лишь в тех точках $z_0 \in \Sigma$, для которых любое решение $z(t, z_0)$ при $a \leq t \leq b$ не обращается в нуль. В силу леммы 15.1 функция $\tilde{\phi}(t, z_0)$ определена при $a \leq t \leq b$ по крайней мере для тех $z \in \Sigma$, норма $\|z\|$ которых достаточно велика.

Функция $\tilde{\phi}(t, z_0)$ обладает следующими свойствами:

1) каждое множество $\tilde{\phi}(t, z_0)$ является отрезком (может быть, вырождающимся в точку);

2) функция $\tilde{\phi}(t, z_0)$ непрерывна по z_0 в том смысле, что каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta > 0$, что из $\|h\| < \delta$ следует включение

$$\tilde{\phi}(t, z_0 + h) \subseteq [\min \tilde{\phi}(t, z_0) - \varepsilon, \max \tilde{\phi}(t, z_0) + \varepsilon];$$

3) справедлива теорема о промежуточном значении, которая нужна в такой форме: объединение множеств $\tilde{\phi}(t, z_0)$, когда z_0 пробегает любой отрезок $[z_1, z_2]$ (см. рис. 15.1), также образует отрезок.

Покажем, во-первых, что множество $\tilde{\phi}(t, z_0)$ ограничено. В предположении противного существует последовательность решений $z_n(t)$, угловые функции $\phi_n(t)$ которых удовлетворяют неравенствам $|\phi(\tau)| > n$. В силу теоремы 15.1 последовательность $(z_n(t, z_0))$ компактна. Поэтому можно считать, что последовательность $z_n(t, z_0)$ равномерно на $a \leq t \leq b$ сходится к некоторому решению $z(t, z_0)$ ³⁵ (в про-

³⁵Тот факт, что предел равномерно сходящейся последовательности решений есть снова решение системы, проще всего получить, если от задачи (15.1)-(15.2) перейти к системе интегральных уравнений.

тивном случае мы перешли бы к подпоследовательности). Пусть $\phi(t)$ — угловая функция решения $z(t, z_0)$. Тогда равномерно на $a \leq t \leq b$ последовательность $\phi_n(t)$ сходится к $\phi(t)$. Последнее противоречит неравенству $|\phi_n(\tau)| > n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Итак, множество $\tilde{\phi}(t, z_0)$ ограничено.

Покажем, во-вторых, что множество $\tilde{\phi}(\tau, z_0)$ замкнуто.

Пусть $\phi_n \rightarrow \phi$ и $\phi_n \in \tilde{\phi}(t, z_0)$ ($n = 1, 2, \dots$). Обозначим через $z_n(t, z_0)$ решение, угловая функция которого удовлетворяет условию $\phi_n(\tau) = \phi_n$ ($n = 1, 2, \dots$). В силу компактности последовательности $z_n(\tau, z_0)$ можно считать, что она равномерно на $a \leq t \leq b$ сходится к решению $z(t, z_0)$ (в противном случае мы так же, как и выше, перешли бы к подпоследовательности). Поэтому последовательность $\phi_n(t)$ равномерно на $a \leq t \leq b$ сходится к угловой функции $\phi(t)$ решения $z(t, z_0)$. При $t = \tau$ получаем $\phi(\tau) = \lim \phi_n(\tau) = \phi$. Тем самым доказана замкнутость множества $\tilde{\phi}(t, z_0)$.

Покажем, наконец, что множество $\tilde{\phi}(t, z_0)$ связно. Предполагая обратное, найдем такие непустые непересекающиеся замкнутые множества \tilde{F}_1 и \tilde{F}_2 что

$$\tilde{\phi}(t, z_0) = \tilde{F}_1 \cup \tilde{F}_2.$$

Разобьем все решения $z(t, z_0)$ на два множества F_1 и F_2 , относя решение в F_1 или в F_2 , смотря по тому, какому множеству, \tilde{F}_1 или \tilde{F}_2 , принадлежит значение угловой функции этого решения при $t = \tau$. Нетрудно видеть, что F_1 и F_2 непусты, замкнуты и не пересекаются. Последнее находится в противоречии с теоремой 15.1, из которой вытекает, в частности, что множество $\{z(t, z_0)\}$ при фиксированном z_0 связно.

Из ограниченности, замкнутости и связности множества $\tilde{\phi}(t, z_0)$ и вытекает, что оно представляет собою либо точку, либо отрезок.

Перейдем к доказательству свойства 2. Предположим, что в некоторой точке z_0 оно не выполнено. Это означает, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ существует последовательность решений $z_n(t, z_0^n)$, угловые функции которых $\phi_n(t)$ удовлетворяют условию

$$\phi_n(\tau) \notin [\min \tilde{\phi}(t, z_0) - \varepsilon, \max \tilde{\phi}(t, z_0) + \varepsilon], \quad (15.13)$$

несмотря на то что $\|z_0^n - z_0\| \rightarrow 0$. Так же, как и выше, в силу компактности последовательности $z(t, z_0^n)$ можно считать, что она равномерно сходится к некоторому решению $z(t, z_0)$. Тогда последовательность $\phi_n(t)$ равномерно сходится к угловой функции $\phi(t)$ этого решения. Так как $\phi(\tau) \in \tilde{\phi}(t, z_0)$, то последнее находится в противоречии с (15.13). Следовательно, функция $\tilde{\phi}(t, z_0)$ непрерывна.

Доказательство свойства 3 проводится тем же путем, как и доказательство теоремы Больцано – Коши для однозначных функций.

15.2. Теоремы сравнения. Теорема 14.5 допускает обобщение на случай нелинейных систем (15.1). Наряду с системой (15.1) рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \tilde{f}(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= \tilde{g}(t, x, y). \end{aligned} \quad (15.14)$$

правые части которой непрерывны в области D ($-\infty < x, y < +\infty$, $a \leq t \leq b$).

Пусть $D^* \subseteq D$. Будем писать $(f, g) \geq (\tilde{f}, \tilde{g})$ в области D^* , если

$$xg(t, x, y) - yf(t, x, y) \leq x\tilde{g}(t, x, y) - y\tilde{f}(t, x, y) \quad ((t, x, y) \in D^*). \quad (15.15)$$

Предположим, что правые части системы (15.14) обладают свойством положительной однородности:

$$\tilde{f}(t, cx, cy) \equiv c\tilde{f}(t, x, y), \quad \tilde{g}(t, cx, cy) \equiv c\tilde{g}(t, x, y) \quad (c \geq 0). \quad (15.16)$$

Из (15.16) вытекает, что система (15.14) имеет нулевое решение, так как

$$\tilde{f}(t, 0, 0) \equiv \tilde{g}(t, 0, 0) \equiv 0,$$

и что вместе с $\tilde{z}(t)$ решением системы будет и $c\tilde{z}(t)$ при любом неотрицательном c .

Кроме того потребуем, чтобы решение системы (15.14) однозначно определялось начальными условиями.

Теорема 15.2. Пусть решения $z(t)$ и $\tilde{z}(t)$ соответственно систем (15.1) и (15.14) определены и не обращаются в нуль на всем отрезке $a \leq t \leq b$, причем $(t, x(t), y(t)) \in D^*$, $(t, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \in D^*$. Обозначим их угловые функции через $\phi(t)$ и $\tilde{\phi}(t)$. Пусть

$$\phi(a) \geq \tilde{\phi}(a), \quad (f, g) \geq (\tilde{f}, \tilde{g}) \quad D^*. \quad (15.17)$$

Тогда

$$\phi(t) \geq \tilde{\phi}(t) \quad (a \leq t \leq b). \quad (15.18)$$

Доказательство. Так как

$$\phi(t) = \arctg \frac{y(t)}{x(t)}, \quad \tilde{\phi}(t) = \arctg \frac{\tilde{y}(t)}{\tilde{x}(t)},$$

то

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{1}{\|z(t)\|} (g(t, \|z(t)\| \cos \phi, \|z(t)\| \sin \phi) \cos \phi - f(t, \|z(t)\| \cos \phi, \|z(t)\| \sin \phi) \sin \phi), \\ \frac{d\tilde{\phi}}{dt} &= \tilde{g}(t, \cos \tilde{\phi}, \sin \tilde{\phi}) \cos \tilde{\phi} - \tilde{f}(t, \cos \tilde{\phi}, \sin \tilde{\phi}) \sin \tilde{\phi} \equiv F(t, \tilde{\phi}). \end{aligned}$$

Здесь использован тот факт, что правые части системы (15.14) удовлетворяют условию (15.16).

Из неравенств (15.17) вытекает, что

$$\phi(a) \geq \tilde{\phi}(a), \quad \frac{d\phi(t)}{dt} \geq F(t, \phi(t)).$$

Осталось применить теорему 14.2.

Теорема доказана.

Заметим, что если в условиях теоремы 15.2 в (15.17) знаки неравенств изменить на обратные, то будет выполнено неравенство $\phi(t) \leq \tilde{\phi}(t)$.

Если правые части ни одной из систем (15.1) и (15.14) не удовлетворяют условиям положительной однородности, то теорема 15.2 неверна. Например, решение системы

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-(r-1)^2} y, \quad \frac{dy}{dt} = e^{-(r-1)^2} x \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}),$$

удовлетворяющее начальному условию

$$x(0) = r_0, \quad y(0) = 0,$$

имеет угловую функцию $\phi(t, r_0) = e^{-(r_0-1)^2} t$. Отсюда следует, что $\phi(t, 1) \geq \phi(t, 2)$ при $t > 0$.

Теперь перейдем к сравнению угловых функций двух решений системы (15.1), сохранив прежнее предположение о непрерывности правых частей и о том, что решение однозначно определяется начальным условием (15.2).

Будем говорить, что система (15.1) *удовлетворяет (+)-условию*, если выражение $g(t, x, y)x - f(t, x, y)y$ ($a \leq t \leq b$, $-\infty < x, y < +\infty$) неотрицательно и если траектории двух различных решений, удовлетворяющих условиям

$$\arg z_1(a) = \arg z_2(a) = \alpha, \quad \arg z_1(\bar{b}) = \arg z_2(\bar{b}) = \beta,$$

$$\alpha \leq \arg z_1(t), \quad \arg z_2(t) \leq \beta \quad (a \leq t \leq \bar{b}),$$

не пересекаются. Последнее условие всегда выполнено для автономных систем, то есть таких систем (15.1), правые части которых не зависят от t . Кроме того, это условие всегда выполнено, если правые части системы (15.1) обладают свойством положительной однородности. Нетрудно заметить, что система, удовлетворяющая (+)-условию, имеет нулевое решение, то есть

$$f(t, 0, 0) \equiv g(t, 0, 0) \equiv 0.$$

Аналогично вводится (-)-условие.

Через $\phi(t, \alpha, \rho)$ обозначим угловую функцию решения системы (15.1), удовлетворяющего начальному условию

$$x(a) = \rho \cos \alpha, \quad y(a) = \rho \sin \alpha, \tag{15.19}$$

для которой $\phi(a, \alpha, \beta) = \alpha$.

Теорема 15.3. Пусть система (15.1) удовлетворяет (+)-условию или (-)-условию. Пусть, кроме того, функция

$$F(t, \phi, r) = \frac{1}{r}(g(t, r \cos \phi, r \sin \phi) \cos \phi - f(t, r \cos \phi, r \sin \phi) \sin \phi) \tag{15.20}$$

не убывает по r .

Тогда функция $\phi(t, \alpha, \rho)$ не убывает по ρ .

Доказательство проведем для случая, когда система (15.1) удовлетворяет (+)-условию. Допустим вначале, что функция $F(t, \phi, r)$ строго возрастает по r .

Обозначим через $z_1(t)$ и $z_2(t)$ решения системы (15.1), удовлетворяющие начальному условию (15.19) при $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_2$ соответственно. Пусть $\phi_1(t) = \phi(t, \alpha, \rho_1)$, $\phi_2(t) = \phi(t, \alpha, \rho_2)$. Нам нужно доказать, что $\phi_1(t) \geq \phi_2(t)$ при $\rho_1 > \rho_2$.

Нетрудно видеть, что функции $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ являются решениями уравнения

$$\frac{d\phi}{dt} = F(t, \phi, r(t)) \quad (15.21)$$

при $r(t) = \|z_1(t)\|$ и $r(t) = \|z_2(t)\|$ соответственно. Из (+)-условия вытекает, в частности, что $\frac{d\phi_1(t)}{dt} \geq 0$ и $\frac{d\phi_2(t)}{dt} \geq 0$.

Так как $\rho_1 > \rho_2$, то

$$\frac{d\phi_1(a)}{dt} = F(a, \alpha, \rho_1) > F(a, \alpha, \rho_2) = \frac{d\phi_2(a)}{dt}.$$

Поэтому на некотором интервале $(a, a + \delta)$ выполнено неравенство $\phi_1(t) > \phi_2(t)$. Обозначим через (a, τ) максимальный интервал, на котором оно выполнено. Допустим, что $\tau < b$. Тогда

$$\phi_1(\tau) = \phi_2(\tau) = \gamma, \quad \frac{d\phi_1(\tau)}{dt} \leq \frac{d\phi_2(\tau)}{dt}. \quad (15.22)$$

Так как выполнено (+)-условие, то из $\rho_1 > \rho_2$ следует, что $\|z_1(\tau)\| \geq \|z_2(\tau)\|$. Используя строгое возрастание функции $F(t, \phi, r)$ по r , получаем

$$\frac{d\phi_1(\tau)}{dt} = F(\tau, \beta, \|z_1(\tau)\|) > F(\tau, \beta, \|z_2(\tau)\|) = \frac{d\phi_2(\tau)}{dt}. \quad (15.23)$$

Последнее противоречит второму из неравенств (15.22). Следовательно, $\phi_1(t) > \phi_2(t)$ на всем полуинтервале $(a, b]$. Итак, в случае строгого возрастания $F(t, \phi, r)$ по r теорема доказана.

Для доказательства теоремы в общем случае рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y) - \varepsilon ry, \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y) + \varepsilon rx \end{aligned} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varepsilon > 0). \quad (15.24)$$

Нетрудно видеть, что соответствующая функция $F_\varepsilon(t, \phi, r)$ имеет вид

$$F_\varepsilon(t, \phi, r) = F(t, \phi, r) + \varepsilon r \quad (15.25)$$

и, следовательно, строго возрастает по r .

Обозначим через $\phi_1^\varepsilon(t)$ и $\phi_2^\varepsilon(t)$ функции $\phi(t, \alpha, \rho; \varepsilon)$ при значениях ρ , равных ρ_1 и ρ_2 . В силу предыдущего имеет место неравенство $\phi_1^\varepsilon(t) > \phi_2^\varepsilon(t)$ ($a < t \leq b$); устремляя в нем ε к нулю, мы приходим к нужному неравенству $\phi_1(t) \geq \phi_2(t)$. Проведение деталей доказательства предоставляется читателю.

Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 15.4. Пусть система (15.1) удовлетворяет (+)-условию ((-)-условию). Пусть, кроме того, функция (15.20) невозрастает по r .

Тогда функция $\phi(t, \alpha, \rho)$ не возрастает по ρ .

Если правые части системы (15.1) непрерывно дифференцируемы по переменным x и y , то неубывание функции $F(t, \phi, r)$ равносильно неотрицательности производной $F'_r(t, \phi, r)$. Можно показать (проверьте!), что неотрицательность этой производной равносильна неравенству

$$g'_x x^2 + (g'_y - f'_x)xy - f'_y y^2 \geq gx - fy \quad ((t, x, y) \in D). \quad (15.26)$$

Упражнение 15.1 (С. Куклес). Пусть дана система

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = g(x),$$

в которой $g(x)$ нечетна и $xg(x) > 0$ при $x \neq 0$. Покажите, что:

1) выполнены все условия теоремы 15.3, если $g(x)$ выпукла при $x \geq 0$ в том смысле, что $g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{g(x_1) + g(x_2)}{2}$ ($x_1, x_2 \geq 0$);

2) выполнены все условия теоремы 15.4, если $g(x)$ вогнута при $x \geq 0$ в том смысле, что $g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{g(x_1) + g(x_2)}{2}$ ($x_1, x_2 \geq 0$).

Упражнение 15.2. Покажите, что в условиях теоремы 15.3 функция $\phi(t, \alpha, \rho)$ выпукла по ρ , если функция $F(t, \phi, r)$ выпукла по r .

15.3. Классы H_k . Перейдем теперь к изучению краевых задач вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y), \end{aligned} \quad (15.27)$$

$$x(a) \sin \alpha - y(a) \cos \alpha = 0, \quad x(b) \sin \beta - y(b) \cos \beta = 0. \quad (15.28)$$

Решением краевой задачи (15.27)-(15.28) называется решение системы (15.27), определенное на всем отрезке $a \leq t \leq b$ и удовлетворяющее краевым условиям (15.28). Геометрически разрешимость краевой задачи означает следующее: система (15.27) имеет решение $z(t) = (x(t), y(t))$, лежащее при $t = a$ на прямой $x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0$, а при $t = b$ на прямой $x \sin \beta - y \cos \beta = 0$.

Дадим следующие определения. Пусть правые части системы (15.27) непрерывны в области D ($a \leq t \leq b$, $-\infty < x, y < +\infty$), обеспечивают единственность решения, определяемого начальными условиями, и обладают свойством положительной однородности по переменным x и y :

$$f(t, cx, y) \equiv cf(t, x, y), \quad g(t, cx, cy) \equiv cg(t, x, y) \quad (c \geq 0).$$

Из этого свойства вытекает, в частности, что система (15.27) имеет нулевое решение, что вместе с $z(t)$ решением системы будет также и $cz(t)$ ($c \geq 0$) и что любое решение системы (15.27) может быть продолжено на весь отрезок $a \leq t \leq b$, так как имеют место оценки³⁶

$$|f(t, x, y)| \leq A\sqrt{x^2 + y^2}, \quad |g(t, x, y)| \leq A\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Обозначим через $\phi^+(t)$ и $\phi^-(t)$ угловые функции решений системы (15.27), удовлетворяющие начальным условиям $\phi^+(a) = \alpha$, $\phi^-(a) = \alpha + \pi$. Назовем краевую задачу (15.27)-(15.28) *регулярной*, если

$$\beta + k\pi < \phi^+(b), \quad \phi^-(b) - \pi < \beta + (k + 1)\pi \quad (15.29)$$

при некотором целом k . В дальнейшем краевые условия мы будем считать фиксированными; поэтому можно говорить о *регулярности* вектор-функции (f, g) — правой части системы (15.27). Через H_k обозначим все регулярные правые части (f, g) , для которых выполнено неравенство (15.27).

Нетрудно видеть, что линейные правые части, составляющие класс G_k (см. п. 14.5), входят в класс H_k .

15.4. Условия разрешимости краевой задачи. Прежде всего сформулируем условия разрешимости краевой задачи следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(t, x, y) + u(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= b(t, x, y) + v(t, x, y), \end{aligned} \quad (15.30)$$

$$x(a) \sin \alpha - y(a) \cos \alpha = 0, \quad x(b) \sin \beta - y(b) \cos \beta = 0. \quad (15.31)$$

Теорема 15.5. Пусть $(a(t, x, y), b(t, x, y))$ регулярна, и пусть непрерывные в области D функции $u(t, x, y)$ и $v(t, x, y)$ равномерно по t удовлетворяют условию

$$\lim_{|x|+|y| \rightarrow \infty} \frac{|u(t, x, y)| + |v(t, x, y)|}{|x| + |y|} = 0. \quad (15.32)$$

Тогда краевая задача (15.30)-(15.31) разрешима.

Доказательство. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\psi}{dt} = b(t, \cos \psi, \sin \psi) \cos \psi - a(t, \cos \psi, \sin \psi) \sin \psi. \quad (15.33)$$

³⁶См. В.В. Немыцкий и В.В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Гостехиздат, 1949.

В силу единственности³⁷ решений этого уравнения, определяемых начальными условиями, и в силу периодичности правой части по ψ , для любого положительного ε можно указать такое $\delta > 0$, что любое решение $\phi(t)$ уравнения

$$\frac{d\phi}{dt} = b(t, \cos \phi, \sin \phi) \cos \phi - a(t, \cos \phi, \sin \phi) \sin \phi + \delta(t), \quad (15.34)$$

в котором $\delta(t)$ непрерывна и $|\delta(t)| < \delta$, отличается от решения $\psi(t)$ уравнения (15.33), удовлетворяющего начальному условию $\psi(a) = \phi(a)$, меньше чем на ε :

$$|\phi(t) - \psi(t)| < \varepsilon \quad (a \leq t \leq b). \quad (15.35)$$

По условию теоремы $(a(t, x, y), b(t, x, y))$ принадлежит некоторому классу k . Поэтому решения уравнения (15.33) $\psi^+(t)$ и $\psi^-(t)$, для которых $\psi^+(a) = \alpha$, $\psi^-(a) = \alpha + \pi$, удовлетворяют при некотором $\varepsilon > 0$ неравенствам

$$\beta + k\pi + \varepsilon < \psi^+(b), \quad \psi^-(b) - \pi < \beta + (k+1)\pi - \varepsilon. \quad (15.36)$$

В силу условия (15.32) справедливо неравенство

$$|v(t, x, y)x - u(t, x, y)y| < \delta(x^2 + y^2) \quad (x^2 + y^2 \geq \rho^2), \quad (15.37)$$

где ρ — некоторое положительное число.

Обозначим через $z(t, c)$ любое решение системы (15.30), удовлетворяющее начальному условию

$$x(a) = c \cos \alpha, \quad y(a) = c \sin \alpha. \quad (15.38)$$

Заметим, что в условиях теоремы решение $z(t, c)$ можно считать определенным на всем отрезке $a \leq t \leq b$, так как правые части допускают оценки³⁸

$$|a(t, x, y) + u(t, x, y)| \leq A\sqrt{x^2 + y^2} + B,$$

$$|b(t, x, y) + v(t, x, y)| \leq A\sqrt{x^2 + y^2} + B.$$

На основании леммы 15.1 можно указать такое число $r_0 > 0$,

$$\|z(t, c)\| \geq \rho \quad |c| \geq r_0. \quad (15.39)$$

Пусть $\phi(t, c)$ — угловая функция решения $z(t, c)$, причем

$$\phi(a, c) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } c > 0, \\ \alpha + \pi, & \text{если } c < 0. \end{cases}$$

³⁷Это вытекает из единственности решения системы (15.30), в которой $u \equiv v \equiv 0$, определяемого начальными условиями.

³⁸См. сноску на предыдущей странице.

В силу (15.39) и (15.37) функция $\phi(t, c)$ при $|c| \geq r_0$ является решением уравнения (15.34), в котором $|\delta(t)| < \delta$ ($a \leq t \leq b$). Поэтому из (15.35) вытекает, что

$$\begin{aligned} |\phi(t, c) - \psi^+(t)| &< \varepsilon & c \geq r_0, \\ |\phi(t, c) - \psi^-(t)| &< \varepsilon & c \leq -r_0. \end{aligned} \tag{15.40}$$

Из последних неравенств и неравенств (15.36) непосредственно следует, что точки $z(b, r_0)$ и $z(b, -r_0)$ лежат по разные стороны от прямой $x \sin \beta - y \cos \beta = 0$. Рассмотрим множество всех решений $z(t, c)$, у которых $|c| \leq r_0$. По теореме 15.1 это множество связно, и, следовательно, при некотором значении $c = c_*$ точка $z(b, c_*)$ лежит на прямой $x \sin \beta - y \cos \beta = 0$. Решение $z(t, c_*)$ и есть решение задачи (15.30)-(15.31).

Теорема доказана.

Упражнение 15.3. *Покажите, что утверждение теоремы 15.5 сохраняет силу, если краевые условия (15.31) заменить условиями*

$$x(a) \sin \alpha - y(a) \cos \alpha = c_1, \quad x(b) \sin \beta - y(b) \cos \beta = c_2.$$

Упражнение 15.4.

1) *Покажите, что краевая задача*

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + g\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad x(a) = x(b) = 0$$

разрешима, если $g(t, x, u)$ непрерывна и равномерно по t

$$\lim_{|x|+|u| \rightarrow \infty} \frac{|g(t, x, u)|}{|x| + |u|} = 0.$$

2) *Покажите, что уравнение Дуффинга*

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \sin x + h(t) = 0$$

имеет решение, удовлетворяющее условию $x(a) = x(b) = 0$.

Упражнение 15.5. *Пусть краевая задача*

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + p(t) \frac{dx}{dt} + q(t)x &= 0, \\ x(a) \sin \alpha + \frac{dx(a)}{dt} \cos \alpha &= 0, \quad x(b) \sin \beta + \frac{dx(b)}{dt} \cos \beta = 0 \end{aligned}$$

имеет лишь нулевое решение. Покажите, что уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + g\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

имеет решение, удовлетворяющее тем же самым краевым условиям, если равномерно по t

$$\lim_{|x|+|u| \rightarrow \infty} \frac{|g(t, x, u) - p(t)u - q(t)x|}{|x| + |u|} = 0.$$

Условия теоремы 15.5 могут быть несколько обобщены.

Предположим, что функции $f(t, x, y)$ и $g(t, x, y)$ непрерывны в области D и каждое решение системы (15.27) продолжимо на весь отрезок $a \leq t \leq b$. Предположим, кроме того, что выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \underline{b}(t, x, y)x - \underline{a}(t, x, y)y + \underline{\delta}(t, x, y) &\leq \\ &\leq g(t, x, y)x - f(t, x, y)y \leq \\ &\leq \bar{b}(t, x, y)x - \bar{a}(t, x, y)y + \bar{\delta}(t, x, y), \end{aligned} \quad (15.41)$$

где $(\underline{a}(t, x, y), \underline{b}(t, x, y))$ и $(\bar{a}(t, x, y), \bar{b}(t, x, y))$ принадлежат одному классу H_k , а функции $\underline{\delta}(t, x, y)$ и $\bar{\delta}(t, x, y)$ непрерывны и удовлетворяют равномерно по t условиям

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \frac{\underline{\delta}(t, x, y)}{x^2 + y^2} = 0, \quad \lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \frac{\bar{\delta}(t, x, y)}{x^2 + y^2} = 0.$$

При выполнении сделанных выше предположений будем говорить, что правая часть (f, g) системы (15.27) *удовлетворяет k -условию на бесконечности* (относительно краевых условий (15.28)). Нетрудно видеть, что в условиях теоремы 15.5 правые части удовлетворяют на бесконечности k -условию.

Аналогично теореме 15.5 может быть доказана

Теорема 15.6. Пусть (f, g) удовлетворяет на бесконечности k -условию. Тогда краевая задача (15.27)-(15.28) разрешима.

Упражнение 15.6. Покажите, что краевая задача

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0, \quad x(a) = x(b) = 0$$

(где $g(t, x, u)$ непрерывна) разрешима, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $|g(t, x, u)| \leq A|x| + B$, где $A(b-a)^2 < \pi^2$;
- 2) $\underline{a}(t)|x| + \underline{\delta} \leq \text{sign } xg(t, x, u) \leq \bar{a}(t)|x| + \bar{\delta}$, где матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \underline{a}(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \bar{a}(t) & 0 \end{pmatrix}$$

принадлежат одному классу G_k , а $\underline{\delta}$ и $\bar{\delta}$ постоянны.

В некоторых случаях для разрешимости краевой задачи (15.27)-(15.28) вместо условия (15.41) достаточно потребовать выполнения лишь одного из неравенств (15.41), то есть в этих случаях условия разрешимости носят односторонний характер.

Пусть, например, правая часть системы (15.27) такова, что

$$g(t, x, y)x - f(t, x, y)y > 0 \quad x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0, \quad x^2 + y^2 \geq \rho^2 \quad (15.42)$$

и выполнено неравенство

$$g(t, x, y)x - f(t, x, y)y \leq b(t, x, y)x - a(t, x, y)y + \delta(t, x, y), \quad (15.43)$$

где $(a(t, x, y), b(t, x, y)) \in H_0$, если $\alpha \geq \beta$ и $(a(t, x, y), b(t, x, y)) \in H_{-1}$, если $\alpha < \beta$, и равномерно по t

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \frac{\delta(t, x, y)}{x^2 + y^2} = 0. \quad (15.44)$$

Имеет место следующая

Теорема 15.7. Пусть любое решение системы (15.27) продолжимо на весь отрезок $a \leq t \leq b$ и выполнены перечисленные выше требования.

Тогда краевая задача (15.27)-(15.28) разрешима.

Доказательство и здесь аналогично доказательству теоремы 15.5 (проведите его!).

Если правая часть (f, g) системы (15.27) удовлетворяет условиям теоремы 15.7, то мы тоже будем говорить, что она удовлетворяет на бесконечности k -условию ($k = 0, -1$), смотря по тому, какому классу H_k принадлежит $(a(t, x, y), b(t, x, y))$.

Упражнение 15.7 (М. Семенов). Покажите, что краевая задача

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0, \quad x(a) = x(b) = 0$$

разрешима, если выполнены условия

$$|g(t, x, u)| \leq A|u|^2 + B \quad g(t, x, u)x \leq \tau_1 x^2 + \tau_2 u^2 + \delta(t),$$

где A, B, τ_1, τ_2 — некоторые постоянные, причем $\tau_1(1 + \tau_2) < \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$.

Упражнение 15.8. Покажите, что краевая задача

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0, \quad x(a) = x(b) = 0$$

разрешима, если выполнено одно из условий:

1) $g(t, x, u) \leq \sigma_1|x| + \sigma_2|u| + \delta_1(t)$ при $x \geq 0$, $g(t, x, u) \geq -\sigma_1|x| - \sigma_2|u| - \delta_2(t)$ при $x \leq 0$, где $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ и

$$\left(\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{2}\right) \left(1 + \frac{\sigma_2}{2}\right) < \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$$

(М.А. Красносельский);

2) $g(t, x, u) \leq a(t, x, u) + \delta_1(t)$ при $x \geq 0$, $g(t, x, u) \geq b(t, x, u) + \delta_2(t)$ при $x \leq 0$, где $a(t, x, u)$ и $b(t, x, u)$ непрерывны, положительно однородны по переменным x и u и каждое из уравнений

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + b\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

обладает решением, не обращающимся в нуль на отрезке $a \leq t \leq b$.

Упражнение 15.9 (С.Н. Бернштейн). Краевая задача (см. упр. 15.8) разрешима, если $g'_x(t, x, u) \leq -\varepsilon$ и $|g(t, x, u)| \leq A|u|^2 + B$ ($\varepsilon > 0$).

Теоремы 15.5-15.7 гарантируют существование решения краевой задачи, так как “кривая” $z(b, c)$ ($-\infty < c < +\infty$) при достаточно больших по модулю значениях c лежит в двух секторах, расположенных по разные стороны от прямой $x \sin \beta - y \cos \beta = 0$.

Однако геометрически ясно, что краевая задача также будет разрешима, если “кривая” $z(b, c)$ имеет спиралевидный характер или при приближении c к нулю (в случае, когда задача уже имеет нулевое решение), или при стремлении $|c|$ к бесконечности.

На этом пути можно получать различные достаточные признаки разрешимости краевой задачи. Два из них мы здесь приведем в виде теорем.

Теорема 15.8. Пусть функции $f(t, x, y)$ и $g(t, x, y)$ непрерывны и все решения системы (15.27) продолжимы на отрезок $a \leq t \leq b$. Пусть выполнено неравенство

$$F(t, \phi, r) \equiv \frac{1}{r}(g(t, r \cos \phi, r \sin \phi) \cos \phi - f(t, r \cos \phi, r \sin \phi) \sin \phi) \geq \varepsilon_0 > 0, \quad (15.45)$$

при $r \geq \rho_0$, причем плоскость (x, y) может быть разбита на конечное число секторов S_1, \dots, S_m , $S_j = \{(\phi, r) : \phi_j \leq \phi \leq \phi_{j+1}, r \geq 0\}$ ($\alpha \leq \phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_{m+1} = \phi_1 + 2\pi$) так, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F(t, \phi, r) = +\infty \quad (15.46)$$

равномерно по всем (t, ϕ) , $\phi_j + \varepsilon \leq \phi \leq \phi_j - \varepsilon$ ($j = 1, \dots, m$), где положительное ε можно считать сколь угодно малым.

Тогда краевая задача (15.27)-(15.28) имеет бесконечное число решений.

Доказательство. Так как все решения системы (15.27) продолжимы, то в силу леммы 15.1 можно указать такое $c_0 > 0$, что при $|c| > c_0$ решение $z(t, c)$ не обращается в нуль и, следовательно, можно говорить об угловой функции $\phi(t, c)$ этого решения.

Возьмем число $\varepsilon > 0$. Каждое исключительное направление $\phi = \phi_j$ заключим в сектор $|\phi - \phi_j| \leq \varepsilon$ ($j = 1, \dots, m$). Выберем теперь $\rho_1 \geq \rho_0$ так, чтобы при $r \geq \rho_1$, $|\phi - \phi_j| \leq \varepsilon \pmod{2\pi}$ выполнялось неравенство

$$F(t, \phi, r) \geq \varepsilon \quad (a \leq t \leq b). \quad (15.47)$$

Введем в рассмотрение разрывную функцию

$$H(\phi) = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{при} & \phi = \phi_j + \delta \pmod{2\pi}, |\delta| \leq \varepsilon, \\ \varepsilon & \text{для остальных значений} & \phi. \end{cases} \quad (15.48)$$

Ясно, что

$$F(t, \phi, r) \geq H(\phi) \quad (a \leq t \leq b, r \geq \rho_1). \quad (15.49)$$

Рассмотрим решение $\psi(t)$ следующей задачи:

$$\frac{d\psi}{dt} = H(\psi), \quad \psi(a) = \alpha.$$

Нетрудно видеть, что время τ , необходимое для того, чтобы $\psi(t)$ приняла значение $\alpha + 2\pi$, равно

$$\tau = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_0}m + \frac{1}{E} (2\pi - 2\varepsilon m). \quad (15.50)$$

Из (15.50) мы заключаем, что $\psi(b) - \psi(a) \geq 2\pi n$, где n — наибольшее число отрезков длины τ , содержащихся в $a \leq t \leq b$. Ясно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$, $E \rightarrow \infty$ число τ стремится к нулю. Поэтому $\psi(b) \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $E \rightarrow +\infty$.

Заметив это, выберем число ρ_2 так, чтобы при $|c| \geq \rho_2$ для всех решений $z(t, c)$ было выполнено неравенство $\|z(t, c)\| \geq \rho_1$ (это возможно в силу леммы 15.1). Тогда угловая функция $\phi(t, c)$ ($\phi(a, c) \equiv \alpha$, $c \geq \rho_2$) решения $z(t, c)$ в силу (15.49) удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\frac{\phi(t, c)}{dt} = F(t, \phi(t, c), \|z(t, c)\|) \geq H(\phi(t, c)).$$

Поэтому³⁹ $\phi(t, c) \geq \psi(t)$ при $a \leq t \leq b$. Согласно сказанному выше $\phi(b, c) \rightarrow +\infty$ при $c \rightarrow +\infty$. Такой же результат имеет место и при $c \rightarrow -\infty$.

Так как функция $\tilde{\phi}(b, c)$ удовлетворяет теореме о промежуточном значении (см. п. 15.1), то существует бесконечное число значений c , как положительных, так и отрицательных, при которых

$$\phi(b, c) = \beta \pmod{\pi}.$$

Это означает, что наша краевая задача (15.27)-(15.28) имеет бесконечное число решений.

Теорема доказана.

Аналогично теореме 15.8 может быть доказана

Теорема 15.9. Пусть функции $f(t, x, y)$ и $g(t, x, y)$ непрерывны и система (15.27) имеет нулевое решение, причем компоненты любого другого решения не обращаются одновременно в нуль. Пусть $F(t, \phi, r) \geq \varepsilon_0$ при $r \leq \rho_0$ и

$$\lim_{r \rightarrow +0} F(t, \phi, r) = +\infty \quad (15.51)$$

равномерно по всем (t, ϕ) , $\phi_j + \varepsilon \leq \phi \leq \phi_{j+1} - \varepsilon$ ($a \leq t \leq b$), $\varepsilon > 0$ и может быть сделано сколь угодно малым).

Тогда справедливо утверждение теоремы 15.8.

Упражнение 15.10. Покажите, что система

$$\frac{dx}{dt} = -h(y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x)$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 15.8, если функции $g(x)$ и $h(y)$ непрерывны, нечетны, $xg(x) \geq \varepsilon_0 x^2$, $yh(y) \geq \varepsilon_0 y^2$ и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty \quad \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{h(y)}{y} = +\infty \right).$$

³⁹Здесь мы пользуемся несколько более общей теоремой о дифференциальных неравенствах, чем теорема 14.2, так как функция $H(\varphi)$ лишь кусочно непрерывна. Справедливость теоремы 14.2 для этого случая предоставляем доказать читателю.

Упражнение 15.11. Покажите, что уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x \sqrt[3]{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + h(t) = 0$$

имеет бесконечное число решений, удовлетворяющих краевым условиям $x(a) = x(b) = 0$.

15.5. Оценка числа решений краевой задачи. Решение краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y), \tag{15.52}$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t, x, y).$$

$$x(a) \sin \alpha - y(a) \cos \alpha = 0, \quad x(b) \sin \beta - y(b) \cos \beta = 0 \tag{15.53}$$

может быть не единственным.

Достаточные условия существования единственного решения дает

Теорема 15.10. Пусть непрерывные функции $f(t, x, y)$ и $g(t, x, y)$ непрерывно дифференцируемы по переменным x и y , $f'_x(t, x, y)$ и $g'_y(t, x, y)$ ограничены и выполнено неравенство

$$\underline{A}(t) \leq \begin{pmatrix} f'_x(t, x, y) & f'_y(t, x, y) \\ g'_x(t, x, y) & g'_y(t, x, y) \end{pmatrix} \leq \bar{A}(t), \tag{15.54}$$

где $\underline{A}(t)$, $\bar{A}(t)$ — матрицы из одного класса G_k .

Тогда краевая задача (15.52)-(15.53) имеет единственное решение.

Доказательство. Неравенство (15.54) означает, что

$$\begin{aligned} & \underline{a}_{21}(t)u^2 + (\underline{a}_{22}(t) - \underline{a}_{11}(t))uv - \underline{a}_{12}(t)v^2 \leq \\ & \leq g'_x(t, x, y)u^2 + (g'_y(t, x, y) - f'_x(t, x, y))uv - f'_y(t, x, y)v^2 \leq \\ & \leq \bar{a}_{21}(t)u^2 + (\bar{a}_{22}(t) - \bar{a}_{11}(t))uv - \bar{a}_{12}(t)v^2 \end{aligned} \tag{15.55}$$

$$(a \leq t \leq b, \quad -\infty < x, y, u, v < +\infty)$$

Из этого неравенства вытекает, в частности, что частные производные $g'_x(t, x, y)$ и $f'_y(t, x, y)$ также ограничены. Поэтому⁴⁰ любое решение системы (15.52) продолжимо на весь отрезок $a \leq t \leq b$.

⁴⁰См. сноску на стр. 189.

Заменяя в (15.55) x на $\xi + s(x - \xi)$, y на $\eta + s(y - \eta)$ и интегрируя неравенство (15.55) по s от 0 до 1, мы получаем, что матрица

$$A(t, x, y, \xi, \eta) = \begin{pmatrix} \int_0^1 f'_x(t, \xi + s(x - \xi), \eta + s(y - \eta)) ds & \int_0^1 f'_y(t, \xi + s(x - \xi), \eta + s(y - \eta)) ds \\ \int_0^1 g'_x(t, \xi + s(x - \xi), \eta + s(y - \eta)) ds & \int_0^1 g'_y(t, \xi + s(x - \xi), \eta + s(y - \eta)) ds \end{pmatrix} \quad (15.56)$$

удовлетворяет неравенству

$$\underline{A}(t) \leq A(t, x, y, \xi, \eta) \leq \overline{A}(t). \quad (15.57)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} f(t, x, y) - f(t, \xi, \eta) &= a_{11}(t, x, y, \xi, \eta)(x - \xi) + a_{12}(t, x, y, \xi, \eta)(y - \eta), \\ g(t, x, y) - g(t, \xi, \eta) &= a_{21}(t, x, y, \xi, \eta)(x - \xi) + a_{22}(t, x, y, \xi, \eta)(y - \eta), \end{aligned} \quad (15.58)$$

где $a_{ij}(t, x, y, \xi, \eta)$ — элементы матрицы $A(t, x, y, \xi, \eta)$.

Положим в (15.58) $\xi = \eta = 0$. Тогда из неравенства (15.57) вытекает, что (f, g) удовлетворяет условиям теоремы 15.6. Следовательно, задача (15.52)-(15.53) имеет решение.

Предположим, что $z(t) = (x(t), y(t))$ и $\zeta(t) = (\xi(t), \eta(t))$ — два решения краевой задачи (15.52)-(15.53). Из (15.58) мы получаем, что разность $z(t) - \zeta(t)$ является решением линейной системы с матрицей $A(t) = A(t, x(t), y(t), \xi(t), \eta(t))$. Кроме того, $z(t) - \zeta(t)$ удовлетворяет краевым условиям (15.53). Из неравенства (15.57) вытекает, что $A(t)$ регулярна (см. теорему 14.9). Следовательно, $z(t) - \zeta(t) \equiv 0$.

Теорема доказана.

Упражнение 15.12. Пусть $g(t, x)$ непрерывна. Покажите, что краевая задача

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g(t, x) = 0, \quad x(a) = x(b) = 0$$

имеет единственное решение, если выполнено одно из условий:

- 1) $m \leq g'_x(t, x) \leq \frac{\pi^2}{(b-a)^2} - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ (Пикар);
- 2) $\frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2} + \varepsilon \leq g'_x(t, x) \leq \frac{(k+1)^2\pi^2}{(b-a)^2} - \varepsilon$, где k — некоторое целое неотрицательное число, а $\varepsilon > 0$.

Упражнение 15.13. Покажите, что уравнение Дуффинга

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta \sin x + h(t) = 0$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее краевым условиям $x(a) = x(b) = 0$, если $|\delta| < \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$.

Упражнение 15.14. Дана краевая задача

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0, \quad x(a) = x(b) = 0.$$

Покажите, что:

- 1) она имеет единственное решение, если функции $g(t, x, u)$, $g'_x(t, x, u)$, $g'_u(t, x, u)$ непрерывны, $|g'_x(t, x, u)| \leq \tau_1$, $|g'_u(t, x, u)| \leq \tau_2$ и $\left(\tau_1 + \frac{\tau_2}{2}\right)\left(1 + \frac{\tau_2}{2}\right) < 1$;
- 2) она имеет не более одного решения если $g'_x(t, x, y) < 0$.

Во многих случаях интересно выяснить, когда краевая задача имеет несколько решений, и дать оценку числа таких решений.

Дадим предварительно следующее определение. Предположим, что система (15.52) имеет нулевое решение, то есть

$$f(t, 0, 0) \equiv g(t, 0, 0) \equiv 0. \quad (15.59)$$

Предположим, далее, что функции $f(t, x, y)$ и $g(t, x, y)$ непрерывно дифференцируемы по переменным x и y при $x^2 + y^2 \leq \rho_0^2$, $a \leq t \leq b$. Образует матрицу

$$A(t) = \begin{pmatrix} f'_x(t, 0, 0) & f'_y(t, 0, 0) \\ g'_x(t, 0, 0) & g'_y(t, 0, 0) \end{pmatrix}. \quad (15.60)$$

Если $A(t) \in G_l$, то будем говорить, что система (15.52) удовлетворяет в нуле l -условию (относительно краевых условий (15.53)).

Теорема 15.11. Пусть система (15.52) удовлетворяет на бесконечности k -условию, а в нуле l -условию, причем $k \neq l$.

Тогда краевая задача (15.52)-(15.53) имеет не менее $2|k-l|$ ненулевых решений.

Доказательство. Пусть $z(t, c) = (x(t, c), y(t, c))$ — любое решение системы (15.52), удовлетворяющее начальному условию

$$x(a) = c \cos \alpha, \quad y(a) = c \sin \alpha, \quad (15.61)$$

а $\phi(t, c)$ — его угловая функция ($\phi(a, c) \equiv \alpha$ при $c > 0$, $\phi(a, c) \equiv \alpha + \pi$ при $c < 0$). В условиях нашей теоремы решение $z(t, c)$ можно считать определенным и не обращающимся в нуль на всем отрезке $a \leq t \leq b$.

Изучим поведение многозначной функции $\tilde{\phi}(b, c)$ при $c > 0$ (относительно свойств $\tilde{\phi}(b, c)$ см. п. 15.1).

Так как на бесконечности система (15.52) удовлетворяет k -условию, то

$$\beta + k\pi < \phi(b, c) < \beta + (k+1)\pi \quad (c > c_1). \quad (15.62)$$

Покажем, что выполнение в нуле l -условия влечет за собой неравенства

$$\beta + l\pi < \phi(b, c) < \beta + (l+1)\pi \quad (0 < c < c_0). \quad (15.63)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\phi}{dt} = g'_x(t, 0, 0) \cos^2 \phi + (g'_y(t, 0, 0) - f'_x(t, 0, 0)) \cos \phi \sin \phi - f'_y(t, 0, 0) \sin^2 \phi + \delta(t). \quad (15.64)$$

Так как в нуле выполнено l -условие, то для решения $\psi(t)$ уравнения (15.64) при $\delta(t) \equiv 0$, удовлетворяющего начальному условию $\psi(a) = \alpha$, справедливы неравенства

$$\beta + l\pi + \varepsilon < \psi(b) < \beta + (l + 1)\pi - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0). \quad (15.65)$$

В силу непрерывной зависимости решения от правой части уравнения⁴¹ по числу ε можно указать такое $\delta > 0$, что любое решение $\phi(t)$ уравнения (15.64), в котором $|\delta(t)| < \delta$ ($a \leq t \leq b$), удовлетворяющее условию $\phi(a) = \alpha$, отличается от $\psi(t)$ меньше чем на ε :

$$|\phi(t) - \psi(t)| < \varepsilon \quad (a \leq t \leq b). \quad (15.66)$$

Выберем теперь число ρ_1 ($\rho_1 < \rho_0$) так, чтобы было справедливо неравенство

$$|f(t, x, y) - f'_x(t, 0, 0)x - f'_y(t, 0, 0)y|^2 + |g(t, x, y) - g'_x(t, 0, 0)x - g'_y(t, 0, 0)y|^2 < \delta^2(x^2 + y^2). \quad (15.67)$$

Это возможно сделать, так как частные производные функций f и g равномерно непрерывны при $a \leq t \leq b$, $x^2 + y^2 \leq \rho_0^2$. В силу непрерывной зависимости решения $z(t, c)$ от c (при малых по модулю значениях c) можно указать такое число $c_0 > 0$, что

$$\|z(t, c)\| < \rho_1 \quad (a \leq t \leq b, 0 \leq c < c_0). \quad (15.68)$$

Функция $\phi(t, c)$ является решением уравнения (15.64), в котором $\delta(t)$ имеет вид

$$\delta(t) = \frac{(g - g'_x x(t, c) - g'_y y(t, c))(x(t, c) - (f - f'_x x(t, c) - f'_y y(t, c))y(t, c))}{x^2(t, c) + y^2(t, c)}, \quad (15.69)$$

где принятые сокращения сами собой понятны.

Пусть $0 < c < c_0$. В силу неравенств (15.68), формулы (15.69) и элементарного неравенства $|u_1 v_1 + u_2 v_2|^2 \leq (u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)$ мы получаем, что $|\delta(t)| < \delta$ ($a \leq t \leq b$). Поэтому справедливо неравенство (15.66), в котором $\phi(t) = \phi(t, c)$. Наконец, так как выполнено (15.65), то из (15.66) следует (15.63).

Функция $\tilde{\phi}(b, c)$ ($0 < c < +\infty$) удовлетворяет теореме Больцано-Коши о промежуточном значении. Поэтому из неравенств (15.62) и (15.63) вытекает существование таких положительных чисел c_j^+ и таких угловых функций $\phi(t, c_j^+)$, что

$$\phi(t, c_j^+) = \beta + j\pi \quad (j = m + 1, \dots, m + |k - l|). \quad (15.70)$$

Здесь $m = \min \{k, l\}$. Очевидно, что решения $z(t, c_j^+)$, соответствующие угловым функциям $\phi(t, c_j^+)$, являются решениями краевой задачи (15.52)-(15.53).

⁴¹**И.Г. Петровский**, *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Гостехиздат, 1952.

Аналогичным образом доказывается существование отрицательных чисел \bar{j} и угловых функций $\phi(t, c_j^-)$, для которых

$$\phi(t, c_j^-) = (\beta + \pi) + j\pi \quad (j = m + 1, \dots, m + |k - l|). \quad (15.71)$$

Если $z(t, c_j^-)$ — решения, соответствующие угловым функциям $\phi(t, c_j^-)$, то мы получаем еще $|k - l|$ решений нашей краевой задачи.

Теорема доказана.

Интересно выяснить, когда в условиях теоремы 15.11 краевая задача имеет точно $2|k - l|$ ненулевых решений. Ясно, что последнее всегда имеет место, когда $\phi(t, c)$ строго монотонна по c как при $c > 0$, так и при $c < 0$. Достаточные условия строгой монотонности функции $\phi(t, c)$ по c дают теоремы 15.3 и 15.4 (в которых нужно заменить слова “не убывает” и “не возрастает” на “возрастает” и “убывает”). Поэтому, если в условиях теоремы 15.11 дополнительно известно, что правая часть системы удовлетворяет условиям теоремы 15.3 или 15.4 (с указанными выше замечаниями), то краевая задача (15.52)-(15.53) имеет точно $2|k - l|$ ненулевых решений.

Упражнение 15.15. В условиях теоремы 15.11 найти наименьшее число корней уравнения

$$x(t, c) \sin \beta - y(t, c) \cos \beta = 0$$

в (a, b) при $c = c_j^+$ и $c = c_j^-$ ($y = m + 1, \dots, m + |k - l|$).

Когда эта оценка будет точной?

Упражнение 15.16. Дать в зависимости от δ оценку числа решений уравнения Дуффинга

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta \sin x = 0,$$

удовлетворяющих краевому условию $x(0) = x(1) = 0$.

Упражнение 15.17. Покажите, что уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g(x) = 0$$

имеет единственное положительное на $(0, \pi)$ решение, если выполнены следующие условия: $g(x)$ непрерывна и нечетна, $0 < g'(0) < 1$, $\frac{g(x)}{x}$ — возрастающая функция ($x > 0$) и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty.$$

15.6. Задачи о собственных значениях. Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y; \lambda), \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y; \lambda). \end{aligned} \quad (15.72)$$

правые части которой зависят от вещественного параметра λ . Будем предполагать, что система (15.72) при всех λ имеет нулевое решение, то есть

$$f(t, 0, 0; \lambda) \equiv g(t, 0, 0; \lambda) \equiv 0.$$

Ставится задача об отыскании таких значений параметра λ , при которых система (15.72) имеет ненулевое решение, удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} x(a) \sin \alpha - y(a) \cos \alpha = 0, \quad x(b) \sin \beta - y(b) \cos \beta = 0 \\ (0 \leq \alpha < \pi, \quad 0 < \beta \leq \pi). \end{aligned} \quad (15.73)$$

Эти значения λ называются *собственными значениями* краевой задачи (15.72)-(15.73); совокупность собственных значений образует *спектр* краевой задачи (15.72)-(15.73).

При изучении малых решений задачи (15.72)-(15.73), то есть таких решений $z(t) = (x(t), y(t))$, для которых $\|z(t)\| < \varepsilon$ достаточно мала, естественно ввести понятие бифуркационного значения параметра λ . Число λ_0 называется *бифуркационным значением*⁴² задачи (15.72)-(15.73), если для любого положительного ε можно указать такое число λ_ε , и такое ненулевое решение $z_\varepsilon(t)$ задачи (15.72)-(15.73) при $\lambda = \lambda_\varepsilon$, что

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda_0| < \varepsilon, \quad \|z_\varepsilon(t)\| < \varepsilon \quad (a \leq t \leq b). \quad (15.74)$$

Для линейных задач бифуркационные значения совпадают с собственными значениями.

Предположим, что функции $f(t, x, y, \lambda)$ и $g(t, x, y, \lambda)$ непрерывно дифференцируемы по переменным x и y при $a \leq t \leq b$, $x^2 + y^2 \leq \rho_0^2$ и рассматриваемых значениях параметра λ . Линейная краевая задача

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f'_x(t, 0, 0; \lambda)x + f'_y(t, 0, 0; \lambda)y, \\ \frac{dy}{dt} &= g'_x(t, 0, 0; \lambda)x + g'_y(t, 0, 0; \lambda)y, \end{aligned} \quad (15.75)$$

$$x(a) \sin \alpha - y(a) \cos \alpha = 0, \quad x(b) \sin \beta - y(b) \cos \beta = 0 \quad (15.76)$$

называется *линеаризованной в нуле* задачей (15.72)-(15.73)

Имеет место следующая

Теорема 15.12. *Каждое бифуркационное значение задачи (15.72)-(15.73) является собственным значением линейной задачи (15.75)-(15.76).*

Доказательство. Мы покажем, что число λ_0 , не являющееся собственным значением задачи (15.75)-(15.76), не может быть бифуркационным значением задачи (15.72)-(15.73). Отсюда и будет вытекать утверждение теоремы.

Пусть $z(t, c; \lambda) = (x(t, c; \lambda), y(t, c; \lambda))$ — решение системы (15.72), удовлетворяющее начальному условию

$$x(a) = c \sin \alpha, \quad y(a) = c \sin \alpha. \quad (15.77)$$

⁴²По поводу этих понятий см. **М.А. Красносельский**, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*, Гостехиздат, 1956. Результаты пункта могут быть получены и как следствие общих теорем о точках бифуркации для операторных уравнений

Ясно, что при любом c решение $z(t, c; \lambda)$ удовлетворяет первому из краевых условий (15.73). Так как для системы (15.72) при $x^2 + y^2 \leq \rho_0^2$ справедлива теорема единственности, то решение $z(t, c; \lambda)$ является при достаточно малых c (по модулю) непрерывной функцией всех своих аргументов⁴³. Обозначим через $\phi(t, c; \lambda)$ угловую функцию решения $z(t, c; \lambda)$ ($\phi(a, c; \lambda) \equiv \alpha$ при $c > 0$, $\phi(a, c; \lambda) \equiv \alpha + \pi$ при $c < 0$).

При любом фиксированном значении λ функция $\phi(t, c; \lambda)$ в силу соотношений (15.58) при $\xi = \eta = 0$ и равенств $f(t, 0, 0; \lambda) = 0$, $g(t, 0, 0; \lambda) = 0$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d\phi}{dt} = a_{21}(t, c; \lambda) \cos^2 \phi + (a_{22}(t, c; \lambda) - a_{11}(t, c; \lambda)) \cos \phi \sin \phi - a_{12}(t, c; \lambda) \sin^2 \phi, \quad (15.78)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11}(t, c; \lambda) &= \int_0^1 f'_x(t, sx(t, c; \lambda), sy(t, c; \lambda)) ds, \\ a_{12}(t, c; \lambda) &= \int_0^1 f'_y(t, sx(t, c; \lambda), sy(t, c; \lambda)) ds, \\ a_{21}(t, c; \lambda) &= \int_0^1 g'_x(t, sx(t, c; \lambda), sy(t, c; \lambda)) ds, \\ a_{22}(t, c; \lambda) &= \int_0^1 g'_y(t, sx(t, c; \lambda), sy(t, c; \lambda)) ds. \end{aligned} \quad (15.79)$$

Положим в (15.78) $c = 0$, $\lambda = \lambda_0$. Нетрудно видеть, что решение $\psi(t)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\psi(a) = \alpha$, является угловой функцией некоторого решения системы (15.75). Так как число λ_0 не является собственным значением задачи (15.75)-(15.76), то при некотором целом l справедливо неравенство

$$\beta + l\pi < \psi(b) < \beta + (l + 1)\pi. \quad (15.80)$$

Из непрерывности частных производных функций f и g по всем переменным вытекает, что коэффициенты $a_{ij}(t, c; \lambda)$ также являются непрерывными функциями всех своих аргументов.

В силу непрерывной зависимости решения от правой части уравнения⁴⁴ для любого положительного η можно указать такое число $\varepsilon > 0$, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |\phi(t, c; \lambda) - \psi(t)| &< \eta \quad 0 < c < \varepsilon, \\ |\phi(t, c; \lambda) - \psi(t) - \pi| &< \eta \quad 0 > c > -\varepsilon, \end{aligned} \quad (15.81)$$

$$(a \leq t \leq b, |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon).$$

⁴³См. сноску на стр. 156.

⁴⁴См. сноску на стр. 156.

Если η достаточно мало, то из последних неравенств в силу (15.80) мы заключаем, что задача (15.72)-(15.73) не имеет решений малой нормы при $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$. Следовательно, λ_0 не является бифуркационным значением.

Теорема доказана.

Утверждение, обратное теореме 15.12, вообще говоря, неверно. Рассмотрим следующий пример. Нелинейная краевая задача

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -e^{-\lambda^2}(1 - x^2 - y^2)y, \\ \frac{dy}{dt} &= e^{-\lambda^2}(1 - x^2 - y^2)x, \end{aligned} \quad x(0) = x(\pi) = 0, \quad (15.82)$$

ни при одном значении λ не имеет решений с малой нормой, отличных от нулевого, так как

$$\begin{aligned} x(t, c; \lambda) &= -c \sin \left(e^{-\lambda^2}(1 - c^2)t \right), \\ x(t, c; \lambda) &= c \cos \left(e^{-\lambda^2}(1 - c^2)t \right). \end{aligned}$$

В то же самое время линеаризованная задача

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -e^{-\lambda^2}y, \\ \frac{dy}{dt} &= e^{-\lambda^2}x, \end{aligned} \quad x(0) = x(\pi) = 0, \quad (15.83)$$

имеет единственное собственное значение $\lambda = 0$.

В связи с этим представляет интерес

Теорема 15.13. *Каждое устойчивое собственное значение линейной задачи (15.75)-(15.76) является бифуркационным значением задачи (15.72)-(15.73).*

Доказательство. Пусть λ_0 — устойчивое (см. п. 14.8) собственное значение задачи (15.75)-(15.76). Коэффициенты системы (15.75) обозначим через $a_{ij}(t; \lambda)$ ($i, j = 1, 2$).

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Согласно определению устойчивого собственного значения для числа ε можно указать такое число $\delta > 0$, что из неравенств

$$|\tilde{a}_{ij}(t; \lambda) - a_{ij}(t; \lambda)| < \delta \quad (a \leq t \leq b, |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon, i, j = 1, 2), \quad (15.84)$$

вытекает, что краевая задача

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \tilde{a}_{11}(t; \lambda)x + \tilde{a}_{12}(t; \lambda)y, \\ \frac{dy}{dt} &= \tilde{a}_{21}(t; \lambda)x + \tilde{a}_{22}(t; \lambda)y, \end{aligned} \quad (15.85)$$

$$x(a) \sin \alpha - y(a) \cos \alpha = 0, \quad x(b) \sin \beta - y(b) \cos \beta = 0 \quad (15.86)$$

имеет собственное значение λ_ε , лежащее в интервале $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$.

Решение $z(t, c; \lambda) = (x(t, c; \lambda), y(t, c; \lambda))$ системы (15.72) является одновременно решением линейной системы

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{11}(t, c; \lambda)x + a_{12}(t, c; \lambda)y, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}(t, c; \lambda)x + a_{22}(t, c; \lambda)y,\end{aligned}\tag{15.87}$$

коэффициенты которой задаются формулами (15.79). В силу непрерывности $z(t, c; \lambda)$ и $a_{ij}(t, c; \lambda)$ ($i, j = 1, 2$) по всем переменным для чисел ε и δ можно найти такое число $\rho_1 > 0$, что будут выполнены неравенства

$$\|z(t, c; \lambda)\| < \varepsilon \quad (a \leq t \leq b, |c| < \rho_1, |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon),\tag{15.88}$$

$$|a_{ij}(t, c; \lambda) - a_{ij}(t; \lambda)| < \delta \quad (a \leq t \leq b, |c| < \rho_1, |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon).\tag{15.89}$$

Зафиксируем теперь некоторое c , $0 < |c| < \rho_1$. Положим $\tilde{a}_{ij}(t; \lambda) = a_{ij}(t, c; \lambda)$. Из неравенств (15.89) в силу сказанного выше вытекает, что задача (15.85)-(15.86) имеет собственное значение λ_ε , для которого $|\lambda_\varepsilon - \lambda_0| < \varepsilon$. Кроме того, решение $z_\varepsilon(t) = z(t, c; \lambda_\varepsilon)$ является решением задачи (15.72)-(15.73), для которого в силу (15.88) выполнено неравенство $\|z_\varepsilon(t)\| < \varepsilon$ ($a \leq t \leq b$). Мы показали, что λ_0 является бифуркационным значением задачи (15.72)-(15.73).

Теорема доказана.

При изучении решений краевой задачи (15.72)-(15.73) большой нормы, то есть таких решений $z(t)$, для которых выполнено неравенство $\|z(t)\| < \frac{1}{\varepsilon}$ ($a \leq t \leq b$), естественно ввести следующее определение. Число λ_0 назовем *бифуркационным значением* задачи (15.72)-(15.73) на бесконечности, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать число λ_ε и решение $z_\varepsilon(t)$ задачи (15.72)-(15.73) такие, что

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda_0| < \varepsilon, \quad \|z_\varepsilon(t)\| > \frac{1}{\varepsilon} \quad (a \leq t \leq b)\tag{15.90}$$

(определенные выше бифуркационные значения, в отличие от этих, естественно было бы назвать бифуркационными значениями в нуле). Опять-таки для линейных задач бифуркационные значения на бесконечности совпадают с собственными значениями.

Пусть правые части системы (15.72) допускают представление в виде

$$\begin{aligned}f(t, x, y; \lambda) &= a_{11}(t; \lambda)x + a_{12}(t; \lambda)y + b_1(t, x, y; \lambda), \\ g(t, x, y; \lambda) &= a_{21}(t; \lambda)x + a_{22}(t; \lambda)y + b_2(t, x, y; \lambda),\end{aligned}\tag{15.91}$$

где $a_{ij}(t; \lambda)$ ($i, j = 1, 2$) непрерывно зависят от параметра λ и t , а функции $b_i(t, x, y; \lambda)$ ($i = 1, 2$) непрерывны по всем переменным и

$$\lim_{|x|+|y| \rightarrow +\infty} \frac{|b_1(t, x, y; \lambda)| + |b_2(t, x, y; \lambda)|}{|x| + |y|} = 0\tag{15.92}$$

равномерно по t ($a \leq t \leq b$) и λ , меняющемся на любом конечном отрезке.

Наряду с задачей (15.72)-(15.73) рассмотрим линейную задачу

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}(t; \lambda)x + a_{12}(t; \lambda)y, \quad (15.93)$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}(t; \lambda)x + a_{22}(t; \lambda)y$$

$$x(a) \sin \alpha - y(a) \cos \alpha = 0, \quad x(b) \sin \beta - y(b) \cos \beta = 0. \quad (15.94)$$

Аналогично теоремам 15.12 и 15.13 могут быть доказаны следующие теоремы.

Теорема 15.14. *Каждое бифуркационное значение задачи (15.72)-(15.73) на бесконечности является собственным значением линейной задачи (15.93)-(15.94).*

Теорема 15.15. *Каждое устойчивое значение линейной задачи (15.93)-(15.94) является бифуркационным значением задачи (15.72)-(15.73) на бесконечности.*

§ 16. Метод направляющей функции в задаче о периодических решениях⁴⁵

16.1. Оператор Пуанкаре-Андронов. Рассмотрим неавтономную систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y, t), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y, t). \end{aligned} \quad (16.1)$$

Будем предполагать, что правые части определены и непрерывны по совокупности всех переменных вместе со своими производными первого порядка по x и y . Тогда будет гарантировано не только существование, но и единственность решения, удовлетворяющего заданному начальному условию.

Решение

$$z(t) = (x(t), y(t)), \quad (16.2)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0) = z_0, \quad (16.3)$$

будем обозначать через $z(t, t_0; z_0)$. Вектор-функция $z(t, t_0; z_0)$ будет непрерывна по совокупности переменных; основные ее свойства выражаются равенствами

$$z(t_0, t_0; z_0) \equiv z_0 \quad (16.4)$$

⁴⁵Этот метод для систем n -го порядка разработан **М.А. Красносельским** и **А.И. Перовым** (см. **М.А. Красносельский** и **А.И. Перов**, ДАН СССР **123** (1958), №2; **А.И. Перов**, *Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений*, диссертация, Воронеж, 1959). Здесь излагаются простейшие теоремы.

и

$$z(t_2, t_1; z(t_1, t_0; z_0)) \equiv z(t_2, t_0; z_0). \quad (16.5)$$

Как и при изучении автономных систем, при изучении вектор-функции $z(t, t_0; z_0)$ возникают трудности в связи с тем, что решения системы (16.1) могут за конечное время “уходить в бесконечность”. Чтобы избежать этого, мы будем наряду с системой (16.1) рассматривать вспомогательные системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y, t; R), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y, t; R), \end{aligned} \quad (16.6)$$

правые части которых при $x^2 + y^2 \leq R^2$ совпадают с функциями $P(x, y, t)$, $Q(x, y, t)$ и для которых уже справедлива теорема о продолжимости каждого решения на бесконечный интервал $-\infty < t < +\infty$. Функции $P(x, y, t; R)$ и $Q(x, y, t; R)$ могут быть определены, например, равенствами

$$\begin{aligned} P(x, y, t; R) &= P(x, y, t)\phi(x^2 + y^2), \\ Q(x, y, t; R) &= Q(x, y, t)\phi(x^2 + y^2), \end{aligned} \quad (16.7)$$

где функция $\phi(u)$ гладкая и имеет график, изображенный на рис. 16.1, то есть $\phi(u) = 1$ при $u \leq R$, $\phi(u) = 0$ при $u \geq R + 1$, $0 < \phi(u) < 1$ при $R < u < R + 1$.

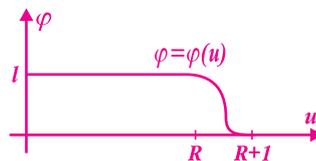


Рис. 16.1

Решение системы (16.6), удовлетворяющее начальному условию (16.3), обозначим через $z_R(t, t_0; z_0)$. Для нас будет важно, что каждая часть интегральной кривой

$$z(t) = z_R(t, t_0; z_0) \quad (16.8)$$

системы (16.6), лежащая в круге $x^2 + y^2 \leq R^2$, является одновременно интегральной кривой системы (16.1).

Пусть ω — некоторое фиксированное положительное число. Допустим, что каждое решение системы (16.1) определено на промежутке $0 \leq t \leq \omega$. Тогда формула

$$T(z_0) = z(\omega, 0; z_0) \quad (16.9)$$

определяет *оператор Пуанкаре – Андронова* T преобразования плоскости в себя.

Очевидна важность оператора Пуанкаре – Андронова в задачах о периодических решениях системы (16.1). Допустим, что правые части этой системы периодичны по t с периодом ω :

$$P(x, y, t + \omega) = P(x, y, t), \quad Q(x, y, t + \omega) = Q(x, y, t). \quad (16.10)$$

Периодическое с периодом ω решение $z(t, 0; z_0)$ удовлетворяет равенству

$$z(\omega, 0; z_0) = z_0, \quad (16.11)$$

то есть начальное условие, определяющее периодическое решение, — это неподвижная точка оператора Пуанкаре – Андронова. Пусть, наоборот, z_0 — неподвижная точка оператора T ; тогда из равенства (16.5) вытекает, что

$$z(t + \omega, 0; z_0) = z(t + \omega, \omega; z(\omega, 0; z_0)) = z(t + \omega, \omega; z_0). \quad (16.12)$$

Но из периодичности правых частей системы (16.1) следует, что

$$z(t + \omega, \omega; z_0) = z(t, 0; z_0). \quad (16.13)$$

Поэтому из (16.12) вытекает, что $z(t, 0; z_0)$ — периодическое решение системы. Итак, между неподвижными точками оператора Пуанкаре – Андронова и периодическими решениями системы установлено взаимно однозначное соответствие.

Если не все решения системы (16.1) определены при $0 \leq t \leq \omega$, то оператор (16.9) определен не на всей плоскости. В этом случае удобно переходить к системам (16.6) и определять для них оператор Пуанкаре – Андронова

$$T_R(z_0) = z_R(\omega, 0; z_0). \quad (16.14)$$

Неподвижные точки оператора T_R определяют периодические решения системы (16.6). Если эти решения окажутся лежащими в круге $x^2 + y^2 \leq R^2$, то они будут периодическими решениями и системы (16.1).

Оператор Пуанкаре – Андронова полезен и в задачах, не связанных с периодическими решениями. В п. 16.6 он будет использован, например, при доказательстве теоремы о существовании ограниченного решения.

16.2. Лемма. Для доказательства существования неподвижных точек у оператора Пуанкаре – Андронова T_R (или T) естественно воспользоваться общими теоремами об особых точках векторного поля

$$\Phi(z) = T_R(z) - z. \quad (16.15)$$

Будем говорить, что точка z_0 обладает свойством ω -невозвращаемости, если при всех $t \in (0, \omega]$

$$z_R(t, 0; z_0) \neq z_0. \quad (16.16)$$

Если все точки некоторой замкнутой кривой Γ обладают свойством ω -невозвращаемости, то это значит, что все векторные поля

$$\Phi(z; t) = z_R(t, 0; z) - z \quad (16.17)$$

при $0 < t \leq \omega$ не имеют на Γ нулевых векторов; следовательно, эти векторные поля гомотопны и имеют одинаковое вращение, равное вращению поля (16.15) на Γ .

Допустим дополнительно, что векторное поле

$$\Phi_0(z) = (P(x, y, 0; R); Q(x, y, 0; R)) \quad (16.18)$$

не имеет на Γ нулевых векторов. Из очевидного равенства

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \Phi(z; t) = \Phi_0(z) \quad (16.19)$$

вытекает, что векторы поля $\Phi(z; t)$ на Γ при малых t не направлены противоположно векторам поля $\Phi_0(z)$. Поэтому поля $\Phi(z; t)$ и, в частности, поле $\Phi(z) = \Phi(z; \omega)$ гомотопны на Γ полю $\Phi_0(z)$ и их вращения одинаковы.

Нами доказана

Лемма 16.1. Пусть вращение поля (16.18) на некоторой замкнутой кривой Γ отлично от нуля. Пусть все точки кривой Γ обладают свойством ω -невозвращаемости.

Тогда оператор T_R имеет по крайней мере одну неподвижную точку, лежащую внутри Γ .

Применение этой леммы для доказательства существования периодических решений требует преодоления ряда трудностей.

Во-первых, нужно уметь вычислять вращение поля (16.18) (или доказывать отличие этого вращения от нуля). Во-вторых, нужно доказывать ω -невозвращаемость точек кривой Γ . В-третьих, нужно доказать, что периодическое решение системы (16.6), определяемое неподвижной точкой оператора T_R полностью лежит в круге $x^2 + y^2 \leq R^2$.

16.3. Направляющая функция. Непрерывно дифференцируемую функцию $U(x, y)$ назовем невырожденной, если векторное поле ее градиентов

$$\text{grad } U(x, y) = (U'_x(x, y), U'_y(x, y)) \quad (16.20)$$

имеет ненулевое вращение на всех окружностях $x^2 + y^2 = R^2$ достаточно больших радиусов. В этом определении, естественно, предполагается, что поле (16.20) на окружностях $x^2 + y^2 = R^2$ не имеет нулевых векторов.

Из теоремы 4.8 вытекает, что непрерывно дифференцируемая четная функция $U(x, y)$ невырождена, если ее градиент не обращается в нуль вне некоторого круга. Для доказательства достаточно заметить, что поле градиентов четной функции — это нечетное векторное поле.

В частности, квадратичные формы

$$U(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \quad (16.21)$$

являются невырожденными функциями, если выполнено неравенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (16.22)$$

При этом (см. § 6) вращение γ поля градиентов функции (16.21)

$$\text{grad } U(x, y) = 2(a_{11}x + a_{12}y, a_{12} + a_{22}y) \quad (16.23)$$

равно $\text{sign}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$.

Методы, изложенные в § 7, позволяют выяснить, будет ли однородная форма

$$U_n(x, y) = a_n^{(0)}x^n + a_{n-1}^{(1)}x^{n-1}y + \dots + a_1^{(n-1)}xy^{n-1} + a_0^{(n)}y^n \quad (16.24)$$

невырождена.

Рассмотрим, например, форму третьего порядка

$$U_3(x, y) = x^3 - y^3.$$

Поле градиентов имеет вид $3(x^2, -y^2)$. Это поле выпускает направление $(1, 1)$, и поэтому его вращение на любой окружности равно нулю. Значит, функция $x^3 - y^3$ вырождена в смысле нашего определения.

Рассмотрим другую форму третьего порядка:

$$U_3(x, y) = ax^2y + bxy^2, \quad (16.25)$$

где числа a и b отличны от нуля. Поле градиентов

$$\text{grad } U_3(x, y) = (y(2ax + by), x(ax + 2by)) \quad (16.26)$$

будет не вырождено, так как прямые $y = 0$ и $2ax + by = 0$ перемежаются с прямыми $x = 0$ и $ax + 2by = 0$ при любых ненулевых a и b (см. § 8).

Упражнение 16.1. При каких соотношениях между a и b вырождена и невырождена функция

$$U_3(x, y) = x^3 + 3ax^2y + 3by^2 + y^3? \quad (16.27)$$

Непрерывно дифференцируемую функцию $U(x, y)$ назовем *направляющей* для системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y, t), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y, t). \end{aligned} \quad (16.1)$$

если она невырождена и если

$$U'_x(x, y)P(x, y, t) + U'_y(x, y)Q(x, y, t) > 0 \quad (16.28)$$

при $x^2 + y^2 \geq R_0^2$, где R_0 — некоторое число.

Отметим аналогию между направляющими функциями и функциями Ляпунова из теории устойчивости решений дифференциальных уравнений.

Условие (16.28) имеет простой геометрический смысл. Оно означает, что угол между вектором $\text{grad } U(x, y)$ и вектором скорости (P, Q) острый. Из теоремы 4.3 вытекает, что вращения полей (16.18) и (16.20) на окружности $x^2 + y^2 = R_0^2$ и

на кривых Γ , внутри которых лежит эта окружность, одинаковы. Так как функция $U(x, y)$ не вырождена, то из неравенства (16.28) вытекает, что вращение поля (P, Q) на указанных выше кривых Γ отлично от нуля.

16.4. Знакопостоянная направляющая функция. Непрерывно дифференцируемую функцию $U(x, y)$ назовем *отрицательно определенной*, если

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} U(x, y) = -\infty. \quad (16.29)$$

Если градиент отрицательно определенной функции не обращается в нуль вне некоторого круга, то эта функция будет невырождена.

Для доказательства обозначим через Γ линию уровня

$$U(x, y) = c.$$

где c — отрицательное число, абсолютная величина которого достаточно велика. Так как во всех точках Γ $\text{grad} U(x, y)$ не обращается в нуль, то Γ не имеет точек самопересечения и точек самокасания (см. п. 11.1). В силу (16.29) кривая Γ лежит в ограниченной части плоскости. Следовательно, Γ — замкнутая кривая. В силу теоремы 2.4 вращение поля градиентов на кривой Γ равно 1. Поэтому вращение поля градиентов равно 1 и на любой окружности, внутри которой лежит Γ . Это означает, что функция $U(x, y)$ не вырождена.

Из проведенных рассуждений вытекает, что $U(x, y)$ будет направляющей функцией для системы (16.1), если выполнены условия (16.28) и (16.29).

Теорема 16.1. Пусть система (16.1) с периодическими по t правыми частями имеет отрицательно определенную направляющую функцию.

Тогда система (16.1) имеет по крайней мере одно периодическое решение.

Доказательство. Пусть Γ — линия уровня функции $U(x, y)$, рассмотренная в начале этого пункта, а G — ограниченная кривой Γ область. Из условия (16.28), как уже отмечалось, вытекает отличие от нуля вращения поля (16.18) на Γ . В нашем случае это вращение равно 1.

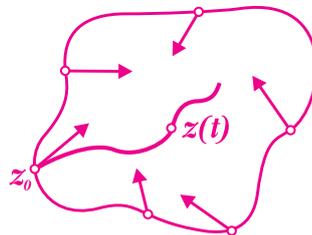


Рис. 16.2

Неравенство (16.28) означает, что все траектории системы (16.1), начинающиеся на Γ , с возрастанием t входят внутрь области G и не возвращаются на Γ (см. рис. 16.2). Отсюда вытекает, что оператор (16.9) определен при всех $z_0 \in \overline{G}$.

Из леммы 16.1 следует, что оператор T имеет в G неподвижную точку z_0^* . Решение $z^*(t) = z(t, 0; z_0^*)$ является периодическим решением системы (16.1).

Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что решение $z^*(t)$ лежит в области G .

Пусть, например, правые части системы (16.1) удовлетворяют неравенству

$$(a_{11}x + a_{12}y)P(x, y, t) + (a_{12}x + a_{22}y)Q(x, y, t) > 0 \quad (x^2 + y^2 \geq R_0^2). \quad (16.30)$$

Тогда функция

$$U(x, y) = \frac{1}{2}(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2)$$

будет направляющей для системы (16.1). Если числа a_{ij} удовлетворяют неравенствам

$$a_{11} < 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad (16.31)$$

то $U(x, y)$ будет отрицательно определенной. Поэтому неравенство (16.30) при условии (16.31) является достаточным условием существования периодического решения у системы (16.1) с периодическими по t правыми частями.

Упражнение 16.2. Докажите, что система

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + \phi(x, y, t),$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy + \psi(x, y, t)$$

с периодическими по t функциями ϕ и ψ имеет по крайней мере одно периодическое решение, если корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеют вещественные части одного знака и если равномерно по t

$$\lim_{|x|+|y| \rightarrow \infty} \frac{|\phi(x, y, t)| + |\psi(x, y, t)|}{|x| + |y|} = 0.$$

16.5. Основная теорема. В условиях теоремы 16.1 векторное поле $(P(x, y, t), Q(x, y, t))$ имеет на Γ вращение, равное 1. Кроме того, все точки кривой Γ обладают свойством ω -невозвращаемости. При проверке этого последнего свойства существенную роль сыграла отрицательная определенность направляющей функции.

Для доказательства существования периодических решений могут быть использованы направляющие функции, не обладающие свойством знакопостоянства. Однако при этом приходится на правые части системы (16.1) налагать дополнительные ограничения.

Введем обозначения

$$m = \min_{x^2+y^2 \leq R_0^2} U(x, y), \quad M = \max_{x^2+y^2 \leq R_0^2} U(x, y), \quad (16.32)$$

где R_0 — радиус того круга, вне которого выполнены условия (16.28). Через S обозначим множество точек плоскости, лежащих вне круга $x^2 + y^2 < R_0^2$, для которых

$$m \leq U(x, y) \leq M. \quad (16.33)$$

Непрерывно дифференцируемую функцию $V(x, y)$ назовем *вспомогательной* для направляющей функции $U(x, y)$, если она удовлетворяет условиям

$$V'_x(x, y)P(x, y, t) + V'_y(x, y)Q(x, y, t) \geq 0 \quad ((x, y) \in S) \quad (16.34)$$

и

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} |V(x, y)| = +\infty \quad ((x, y) \in S). \quad (16.35)$$

Функция $V(x, y)$ может быть определена только на S .

Теорема 16.2. Пусть для системы (16.1) с периодическими правыми частями могут быть указаны направляющая и вспомогательная функции.

Тогда эта система имеет по крайней мере одно периодическое решение.

Доказательство. Допустим вначале, что все решения системы (16.1) могут быть определены при всех t . Тогда оператор Пуанкаре – Андронова T определена всей плоскости. Из условия (16.28) вытекает отличие от нуля вращения поля (P, Q) на каждой окружности $x^2 + y^2 = R_1^2$ для $R_1 \geq R_0$. Поэтому для применения леммы 16.1 нужно найти такое R_1 , чтобы все точки окружности Γ ($x^2 + y^2 = R_1^2$) обладали свойством ω -невозвращаемости.

Введем обозначение

$$N = \max_{x^2+y^2 \leq R_0^2} |V(x, y)|. \quad (16.36)$$

В силу (16.35) можно выбрать такое R_1 , что

$$|V(x, y)| > N \quad ((x, y) \in \Gamma \cap S). \quad (16.37)$$

Покажем, что все точки окружности Γ обладают тогда свойством ω -невозвращаемости.

Через $u(t)$ и $v(t)$ ниже обозначаются функции

$$u(t) = U(x(t), y(t)), \quad v(t) = V(x(t), y(t)). \quad (16.38)$$

где $(x(t), y(t))$ — решение системы (16.1), удовлетворяющее начальному условию

$$(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0) \in \Gamma.$$

В силу (16.28) функция $u(t)$ строго возрастает, пока точка $(x(t), y(t))$ находится вне круга K ($x^2 + y^2 \leq R_0^2$). Отсюда вытекает, что точка (x_0, y_0) обладает свойством невозвращаемости, если решение лежит вне круга K .

Пусть вначале точка (x_0, y_0) не принадлежит S . Тогда выполнено одно из неравенств

$$U(x_0, y_0) > M$$

или

$$U(x_0, y_0) < m.$$

Если выполнено первое из них, то решение $(x(t), y(t))$ при $t > t_0$ все время находится вне круга K , так как в противном случае функция $u(t)$ не была бы возрастающей. Предположим, что выполнено второе неравенство, но точка (x_0, y_0) обладает свойством возвращаемости:

$$x(t_1) = x_0, \quad y(t_1) = y_0 \quad (t_1 > t_0).$$

Тогда при некотором t_2 ($t_0 < t_2 < t_1$) будет выполнено неравенство

$$x^2(t_2) + y^2(t_2) \leq R_0^2.$$

Обозначим тогда через t^* наибольшее значение t из промежутка $[t_0, t_1]$, при котором решение лежит в круге K . Очевидно,

$$u(t^*) \geq m$$

и из монотонности $u(t)$ вытекает, что

$$u_1(t_1) > u(t^*) \geq m.$$

Мы пришли к противоречию.

Пусть теперь $(x_0, y_0) \in S$. Тогда $m \leq u(t_0) \leq M$, $|v(t_0)| > N$. Предположим, что $v(t_0) > N$. При возрастании t точка $(x(t), y(t))$ может все время лежать в S , при этом $v(t)$ будет неубывающей и решение не будет входить в круг K . Функция $v(t)$ будет при этом строго возрастать, в силу чего точка (x_0, y_0) будет обладать свойством невозвращаемости. Если же при возрастании t точка $(x(t), y(t))$ выйдет на границу множества S в момент t^* , то будет выполнено равенство $u(t^*) = M$. Это значит, что при $t > t^*$ функция $u(t)$ принимает значения большие, чем M . Таким образом, функция $u(t)$ строго возрастает при всех $t > t^*$, и, следовательно, точка (x_0, y_0) обладает свойством невозвращаемости.

Нам осталось рассмотреть случай, когда $(x_0, y_0) \in S$, $m \leq u(t_0) \leq M$, $v(t_0) < -N$. Допустим, что точка (x_0, y_0) обладает свойством возвращаемости: $x(t_1) = x_0$, $y(t_1) = y_0$ ($t_1 > t_0$). Обозначим через t^* наибольшее значение t из промежутка $[t_0, t_1]$, при котором решение лежит в круге K . Тогда $v(t^*) \geq -N$ и из монотонности $v(t)$ вытекает, что $v(t_1) \geq v(t^*) \geq -N$. Но $v(t_1) = v(t_0) < -N$. Мы пришли к противоречию.

Итак, теорема доказана в предположении, что все решения системы (16.1) определены при всех t .

Из доказательства теоремы вытекает, что периодические решения $z^*(t)$ системы (16.1) лежат в круге $x^2 + y^2 < R_1^2$.

Это позволяет доказать утверждение теоремы в общем случае. Для этого нужно рассмотреть систему (16.6) при $R = R_1$. Нетрудно видеть, что для новой системы выполнены все условия теоремы 16.2, за исключением того, что строгое неравенство (16.28) при $x^2 + y^2 \geq (R_1 + 1)^2$ переходит в равенство. Однако это изменение условия не меняет доказательства. Поэтому система (16.6) имеет периодические

решение, лежащее в круге $x^2 + y^2 \leq R_1^2$. Это решение является одновременно периодическим решением системы (16.1).

Теорема доказана.

Предположим, например, что правые части системы (16.1) периодичны по t и удовлетворяют неравенству

$$(2\alpha\gamma x + (\alpha\delta + \beta\gamma)y)P(x, y, t) + ((\alpha\delta + \beta\gamma)x + 2\beta\delta y)Q(x, y, t) > 0$$

$$(x^2 + y^2 \geq R_0^2), \quad (16.39)$$

где

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Из (16.39) вытекает, что функция

$$U(x, y) = (\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y)$$

является направляющей для системы (16.1). Она не является знакопостоянной. Поэтому теорема 16.1 неприменима. Пусть дополнительно выполнены неравенства

$$\beta P(x, y, t) - \alpha Q(x, y, t) \geq 0 \quad (|\alpha x + \beta y| \leq \varepsilon_0),$$

$$\delta P(x, y, t) - \gamma Q(x, y, t) \geq 0 \quad (|\gamma x + \delta y| \leq \varepsilon_0), \quad (16.40)$$

где ε_0 — некоторое положительное число. Неравенства (16.40) означают, что функция

$$V(x, y) = \begin{cases} \beta x - \alpha y & \text{при } |\alpha x + \beta y| \leq \varepsilon_0, \\ \delta x - \gamma y & \text{при } |\gamma x + \delta y| \leq \varepsilon_0, \end{cases} \quad (x^2 + y^2 \geq R_0^2)$$

является вспомогательной для направляющей функции $U(x, y)$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 16.2. Значит, неравенства (16.39) и (16.40) являются достаточными условиями существования периодического решения у системы (16.1).

Упражнение 16.3 (Б.П. Демидович). Докажите, что система

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + \phi(x, y, t),$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy + \psi(x, y, t)$$

с периодическими по t функциями ϕ и ψ имеет по крайней мере одно периодическое решение, если корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

вещественные, разного знака и если равномерно по t

$$\lim_{|x|+|y| \rightarrow \infty} \frac{|\phi(x, y, t)| + |\psi(x, y, t)|}{|x| + |y|} = 0.$$

Упражнение 16.4. Приведите пример системы, для которой функция (16.25) является направляющей. Подберите вспомогательную для (16.25) функцию.

Допустим, что одно периодическое решение $z^*(t) = (x^*(t), y^*(t))$ системы (16.1) известно. Точка (x_0, y_0) , где $x_0 = x^*(0)$ и $y_0 = y^*(0)$, будет неподвижной точкой преобразования T Пуанкаре – Андронова или, что то же, будет особой точкой векторного поля

$$\Phi(z) = T(z) - z \equiv (\phi(x, y), \psi(x, y)). \quad (16.41)$$

Рассмотрим линеаризованную систему

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= P'_x(x^*(t), y^*(t), t)\xi + P'_y(x^*(t), y^*(t), t)\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= Q'_x(x^*(t), y^*(t), t)\xi + Q'_y(x^*(t), y^*(t), t)\eta, \end{aligned} \quad (16.42)$$

и обозначим через T'_{z^*} преобразование Пуанкаре – Андронова, определенное этой системой. Из теорем о дифференцируемости по начальным данным решений дифференциальных уравнений⁴⁶ вытекает, что компоненты векторного поля

$$T'_{z^*}\zeta - \zeta = (\phi_1(\xi, \eta), \psi_1(\xi, \eta)) \quad (16.43)$$

определяются равенствами

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi, \eta) &= \phi'_x(x_0, y_0)\xi + \phi'_y(x_0, y_0)\eta, \\ \psi_1(\xi, \eta) &= \psi'_x(x_0, y_0)\xi + \psi'_y(x_0, y_0)\eta. \end{aligned}$$

Иначе говоря, поле (16.43) — это линеаризованное в точке (x_0, y_0) поле (16.41).

Предположим, что поле (16.43) невырождено (например, система (16.42) — это система с постоянными коэффициентами, матрица которых не имеет нулевого характеристического значения). Пусть γ — индекс нулевой особой точки поля (16.43). Тогда из теоремы 6.3 вытекает, что (x_0, y_0) является изолированной особой точкой поля (16.41) и индекс этой особой точки равен также γ_0 .

Если поле (16.43) вырождено, то вычисление индекса особой точки (x_0, y_0) поля (16.41) становится более сложной задачей. Здесь могут быть применены результаты §§ 7, 8, 17.

Для дальнейших рассуждений важен лишь тот факт, что индекс γ_0 особой точки (x_0, y_0) поля (16.41) предполагается известным.

Обозначим через γ вращение поля градиентов направляющей функции $U(x, y)$ на окружности $x^2 + y^2 = R^2$ большого радиуса R . В условиях теорем 16.1 и 16.2 вращение поля (16.41) на этих окружностях, как это следует из доказательств, также будет равно γ .

Из теоремы 3.2 тогда вытекает

Теорема 16.3. Пусть $\gamma_0 \neq \gamma$.

⁴⁶И.Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1952.

Тогда система (16.1) кроме $z^*(t)$ имеет по крайней мере еще одно периодическое решение.

16.6. Существование ограниченных решений. Откажемся теперь от предположения, что правые части системы

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y, t), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y, t).\end{aligned}\tag{16.1}$$

периодичны по t . Нас будет интересовать вопрос о существовании у системы (16.1) решений $z(t) = (x(t), y(t))$, ограниченных при всех t :

$$\|z(t)\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \leq c \quad (-\infty < t < +\infty).\tag{16.44}$$

Предположим, что решения системы (16.1) определены при всех $t \in (-\infty, +\infty)$. Напомним, что во всем параграфе предполагается, что правые части системы (16.1) дифференцируемы по переменным x и y , откуда, в частности, вытекает, единственность решения, определяемого начальными условиями.

Пусть, как обычно, $z(t, t_0; z_0)$ — решение системы (16.1), удовлетворяющее начальному условию $z(t_0) = z_0$. Точки решения, отвечающие значениям $t > t_0$, образуют, как говорят, положительную полутраекторию точки z_0 . Аналогично определяется отрицательная полутраектория.

Лемма 16.2. Пусть вращение поля скоростей (P, Q) на некоторой замкнутой кривой Γ отлично от нуля при всех t . Пусть все точки $z_0 \in \Gamma$ обладают свойством невозвращаемости:

$$z(t, t_0; z_0) \neq z_0 \quad (t > t_0).\tag{16.45}$$

Пусть, наконец, положительная и отрицательная полутраектории каждой точки $z_0 \in \Gamma$ не пересекаются внутри области G , ограниченной кривой Γ .

Тогда система (16.1) имеет по крайней мере одно ограниченное решение.

Доказательство. Пусть n — натуральное число. В силу леммы 16.1 (ее требования здесь выполнены очевидным образом) существует решение $z_n(t)$ системы (16.1), определенное при $|t| \leq n$, для которого $z_n(-n) = z_n(n) \in G$. Решение $z_n(t)$ при $|t| \leq n$ целиком лежит в области G . Предположим обратное, и пусть t_0 — то значение времени t , при котором $z_n(t) = z_0 \in \Gamma$. Решение $z_n(t)$ можно рассматривать и как решение с начальным условием $z(t_0) = z_0$, равенство $z_n(-n) = z_n(n) \in G$ противоречит тогда последнему предположению леммы.

Из последовательности $z_n(t)$ в силу ее компактности на каждом конечном промежутке обычным образом можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому решению $z^*(t)$ системы (16.1) равномерно на каждом конечном промежутке изменения t . Так как $z_n(t) \in G$, то $z^*(t) \in \overline{G}$ при $-\infty < t < +\infty$.

Лемма доказана.

Если все точки кривой Γ обладают тем свойством, что их положительные полутраектории лежат в области G , а отрицательные полутраектории — вне области G , то все условия леммы 16.2 выполнены очевидным образом. При этом утверждение леммы сохраняет силу и в том случае, когда не все решения системы (16.1) определены при всех t . Это замечание позволяет сформулировать следующий аналог теоремы 16.1.

Теорема 16.4. *Пусть система (16.1) имеет знакопостоянную направляющую функцию.*

Тогда система (16.1) имеет по крайней мере одно ограниченное решение.

Сформулируем теперь аналог теоремы 16.2.

Теорема 16.5. *Пусть для системы (16.1) могут быть указаны направляющая и вспомогательная функции.*

Тогда система (16.1) имеет по крайней мере одно ограниченное решение.

Если решения системы (16.1) определены при всех t , то утверждение этой теоремы вытекает из леммы 16.2. Условия леммы 16.2, по существу, были проверены при доказательстве теоремы 16.2.

Если же не все решения системы определены при всех t , то нужно предварительно перейти к системе (16.6), как это было сделано в последней части доказательства теоремы 16.2.

ДОПОЛНЕНИЕ

§ 17. Вычисление индекса нулевой особой точки в общем случае⁴⁷

17.1. Предварительные замечания. Рассмотрим непрерывное векторное поле

$$\Phi(x, y) = (\phi^1(x, y), \phi^2(x, y)), \quad (17.1)$$

определенное в некоторой окрестности начала координат, причем $\Phi(0, 0) = 0$, то есть начало координат является особой точкой. В гл. 2 было рассмотрено несколько методов, позволяющих в основных случаях установить, является ли нулевая особая точка поля (17.1) изолированной, и вычислить ее индекс.

В этом дополнении будет указан алгоритм вычисления индекса в случае, который является в некотором смысле общим. При этом относительно функций $\phi^1(x, y)$ и $\phi^2(x, y)$ будем предполагать, что они имеют вид

$$\begin{aligned} \phi^1(x, y) &= a_1(x, y) + \dots + a_m(x, y) + \omega^1(x, y), \\ \phi^2(x, y) &= b_1(x, y) + \dots + b_m(x, y) + \omega^2(x, y), \end{aligned} \quad (17.2)$$

где $a_i(x, y), b_i(x, y)$ — однородные относительно x, y многочлены степени i , а $\omega^1(x, y)$ и $\omega^2(x, y)$ — бесконечно малые более высокого, чем $(x^2 + y^2)^{\frac{M}{2}}$, порядка.

Будем обозначать через Φ_i векторное поле

$$\Phi_i(x, y) = (\phi_i^1(x, y), \phi_i^2(x, y)), \quad (17.3)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_i^1(x, y) &= a_1(x, y) + \dots + a_i(x, y), \\ \phi_i^2(x, y) &= b_1(x, y) + \dots + b_i(x, y). \end{aligned} \quad (17.4)$$

Нас будет интересовать вопрос о том, как по полю (17.3) выяснить, является ли нулевая особая точка поля (17.1) изолированной, и как вычислить ее индекс. Естественно ожидать, что поле (17.3) будет главной частью поля (17.1) и возможно применение теоремы Руше 4.6. Как уже отмечалось (п. 6.1), необходимым условием этого является изолированность нулевой особой точки поля (17.3). Это условие

⁴⁷Результаты параграфа установлены **П.П. Забрейко**. См. **П.П. Забрейко**, *О вычислении индекса Пуанкаре*, ДАН СССР, т. 145 (1962), №5.

однако, не достаточно. В связи с этим введем следующее определение. Поле (17.3) назовем *невыврожденным*,⁴⁸ если для некоторых $\rho > 0$ и $\alpha > 0$ выполняется неравенство

$$\|\Phi_i(x, y)\| \geq \alpha(x^2 + y^2)^{\frac{i}{2}} \quad (17.5)$$

при $x^2 + y^2 \leq \rho^2$. Если поле Φ_i невырождено, то, как нетрудно видеть, будет невырожденным и поле Φ_j при $j > i$.

Пусть поле (17.3) невырождено. Тогда нулевая особая точка всякого векторного поля

$$F(x, y) = (\phi_i^1(x, y) + \omega^1(x, y), \phi_i^2(x, y) + \omega^2(x, y)), \quad (17.6)$$

где

$$\omega^1(x, y), \omega^2(x, y) = o\left((x^2 + y^2)^{\frac{i}{2}}\right)$$

(в частности, поля (17.1)), изолирована и ее индекс совпадает с индексом нулевой особой точки поля (17.3).

Докажем обратное предложение: *если нулевая особая точка поля (17.6) изолирована при всех $\omega^1(x, y), \omega^2(x, y) = o\left((x^2 + y^2)^{\frac{i}{2}}\right)$, то векторное поле (17.3) является невырожденным*. В самом деле, пусть поле (17.3) вырождено. Тогда существуют такие последовательности чисел x_k, y_k , сходящиеся к нулю, что

$$\|\Phi_i(x_k, y_k)\| < \frac{1}{k}(x_k^2 + y_k^2)^{\frac{i}{2}}. \quad (17.7)$$

Положим

$$\alpha(x_k, y_k) = -\frac{\phi_i^1(x_k, y_k)}{(x_k^2 + y_k^2)^{\frac{i}{2}}}, \quad \alpha(0, 0) = 0;$$

$$\beta(x_k, y_k) = -\frac{\phi_i^2(x_k, y_k)}{(x_k^2 + y_k^2)^{\frac{i}{2}}}, \quad \beta(0, 0) = 0.$$

Функции $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$ определены и непрерывны на замкнутом множестве точек $(0, 0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$. Обозначим через $\tilde{\alpha}(x, y)$ и $\tilde{\beta}(x, y)$ непрерывные продолжения этих функций на плоскость, и пусть

$$\omega_0^1(x, y) = \tilde{\alpha}(x, y)(x^2 + y^2)^{\frac{i}{2}}, \quad \omega_0^2(x, y) = \tilde{\beta}(x, y)(x^2 + y^2)^{\frac{i}{2}}.$$

Из (17.7) вытекает, что

$$\omega_0^1(x, y) = o\left((x^2 + y^2)^{\frac{i}{2}}\right), \quad \omega_0^2(x, y) = o\left((x^2 + y^2)^{\frac{i}{2}}\right);$$

поэтому нулевая особая точка поля

$$F_0(x, y) = (\phi_i^1(x, y) + \omega_0^1(x, y), \phi_i^2(x, y) + \omega_0^2(x, y))$$

должна быть изолированной. Однако нетрудно видеть, что

$$F_0(x_k, y_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

⁴⁸Читатель заметит, что если $\varphi_i^1(x, y)$ и $\varphi_i^2(x, y)$ представляют собой однородные многочлены степени i , то новое понятие невырожденности совпадает с введенным в п. 8.1.

Мы пришли к противоречию.

Описываемый ниже алгоритм в результате конечного числа шагов указывает такое наименьшее число m , что при $i = m$ поле (17.3) невырождено, или показывает, что поля (17.3) вырождены при всех $i \leq M$. Одновременно указывается способ вычисления индекса нулевой особой точки невырожденного поля (17.3). Таким образом, предлагаемый алгоритм позволяет вычислить индекс нулевой особой точки поля (17.1) во всех тех случаях, когда он определяется конечным числом членов в разложении функций $\phi^1(x, y)$ и $\phi^2(x, y)$ по формуле Тейлора.

Пусть нулевая особая точка поля (17.1) изолирована. В общем случае это не означает, что при некотором i поле (17.3) невырождено, даже если возможны представления (17.2) с любым M . Например, векторное поле $\Phi(x, y) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}}, y \right)$ имеет изолированную нулевую особую точку, но все поля (17.3) для него имеют вид $(0, y)$ и потому вырождены. Однако в случае, если компоненты поля (17.1) являются аналитическими функциями, можно показать, что нулевая особая точка будет изолированной в том и только том случае, когда при некотором i поле (17.3) невырождено.

17.2. Основная теорема. Пусть m_0 — такое число, что

$$\begin{aligned} a_1(x, y) &\equiv \dots \equiv a_{m_0-1}(x, y) \equiv 0 \\ b_1(x, y) &\equiv \dots \equiv b_{m_0-1}(x, y) \equiv 0 \end{aligned} \tag{17.8}$$

и хотя бы один из многочленов $a_{m_0}(x, y), b_{m_0}(x, y)$ не равен тождественно нулю.

Поле

$$\Psi_0(x, y) = \Phi_{m_0}(x, y) = (a_{m_0}(x, y), b_{m_0}(x, y)) \tag{17.9}$$

однородно. Поэтому (см. п. 8.1), если алгебраические уравнения

$$a_{m_0}(1, k) = 0, \quad b_{m_0}(1, k) = 0 \tag{17.10}$$

не имеют общих конечных или бесконечных вещественных корней, то поле Φ_{m_0} будет невырожденным.

Мы будем рассматривать теперь тот случай, когда поле Ψ_0 вырождено, то есть уравнения (17.10) имеют один или несколько общих вещественных корней. Пусть

$$k_1, k_2, \dots, k_s \tag{17.11}$$

— эти вещественные корни. Векторы поля (17.9) будут обращаться в нуль на $2s$ лучах:

$$\begin{aligned} L_1 : y = k_1 x \quad (x \geq 0); \quad L_2 : y = k_1 x \quad (x \leq 0); \\ \dots \tag{17.12} \end{aligned}$$

$$L_{2s-1} : y = k_s x \quad (x \geq 0); \quad L_{2s} : y = k_s x \quad (x \leq 0)$$

(если среди корней (17.11) есть корень $k = \infty$, то ему соответствуют лучи $x = 0$ ($y \geq 0$) и $x = 0$ ($y < 0$)). Лучи (17.12) в дальнейшем мы будем называть *лучами вырождения* поля Ψ_0 .

Обозначим через $d_0(x, y)$ общий наибольший делитель многочленов $a_{m_0}(x, y)$, $b_{m_0}(x, y)$. Тогда

$$\Psi_0(x, y) = \tilde{\Psi}_0(x, y)d_0(x, y), \quad (17.13)$$

где $\tilde{\Psi}_0$ — однородное поле с изолированной нулевой особой точкой. Пусть γ_0 — индекс нулевой особой точки этого поля.

Через $\Gamma_\sigma(\varepsilon)$ ($\sigma = 1, \dots, 2s$) будем обозначать множество точек, лежащих в угле в 2ε радиан, биссектрисой которого является луч L_σ , через $\Pi(\varepsilon)$ — замыкание множества точек плоскости, не лежащих в $\bigcup_{\sigma} \Gamma_\sigma(\varepsilon)$ (см. рис. 17.1). В ненулевых точках $\Pi(\varepsilon)$ векторы поля Ψ_0 отличны от нуля. Поэтому определено вращение⁴⁹ $\gamma_0(\Psi_0, \varepsilon, 1)$ поля Ψ_0 на части единичной окружности S_1 ($x^2 + y^2 = 1$), лежащей в $\Pi(\varepsilon)$. В силу (17.13) $\gamma_0(\Psi_0, \varepsilon, 1) \rightarrow \gamma_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Выберем число $\varepsilon_0 < \frac{\pi}{2}$ так, чтобы при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ каждое из множеств $\Gamma_\sigma(\varepsilon)$ не содержало лучей, отличных от L_σ , на которых хотя бы одна из компонент поля Ψ_0 обращалась в нуль, и чтобы выполнялось неравенство

$$|\gamma_0(\Psi_0, \varepsilon, 1) - \gamma_0| < \frac{1}{8}. \quad (17.14)$$

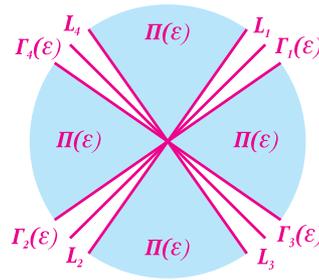


Рис. 17.1

Лемма 17.1. Для любого ε ($0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$) существуют такие числа $\rho > 0$ и $\alpha > 0$, что при $t > t_0$ и $x^2 + y^2 \leq \rho^2$, $(x, y) \in \Pi(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\|\Phi_m(x, y)\| \geq \alpha(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}. \quad (17.15)$$

Доказательство этой леммы совпадает с доказательством теоремы 8.1, только рассуждения проводятся не на всей плоскости, а лишь на множестве $\Pi(\varepsilon)$.

Лемма 17.1 означает, что неравенство (17.5) при $i \geq t_0$ и малых $x^2 + y^2$ может невыполняться лишь на множествах $\Gamma_\sigma(\varepsilon)$ ($\sigma = 1, 2, \dots, 2s$). Назовем луч вырождения L_σ *неособым* для поля Φ_m , если существуют такие числа $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$ и $\alpha > 0$, что при $x^2 + y^2 \leq \rho^2$, $(x, y) \in \Gamma_\sigma(\varepsilon)$ выполняется неравенство (17.15).

⁴⁹Вращением векторного поля на множестве, состоящем из нескольких дуг, называется сумма вращений этого поля на отдельных дугах.

Пусть L_σ — неособый луч для поля Φ_m . Покажем, что существует предел

$$\gamma_\sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 0} \gamma_\sigma(\Phi_m, \varepsilon, \rho), \quad (17.16)$$

где через $\gamma_\sigma(\Phi_m, \varepsilon, \rho)$ обозначено вращение поля Φ_m , на части окружности S_ρ ($x^2 + y^2 = \rho^2$), лежащей в $\Gamma_\sigma(\varepsilon)$.

Действительно, так как векторы поля Φ_m в точках $\Gamma_\sigma(\varepsilon)$ при малых положительных $x^2 + y^2$ отличны от нуля, то $\gamma_\sigma(\Phi_m, \varepsilon, \rho)$ непрерывно зависит от ρ . Вращение $\gamma_\sigma(\Phi_m, \varepsilon, \rho)$ отличается на целое число от деленного на 2π угла между векторами поля Φ_m в точках P и Q (см. рис. 17.2). В каждой из точек P и Q при $\rho \rightarrow 0$ векторы полей Φ_m и Ψ_0 стремятся совпасть по направлению. Поле Ψ_0 однородно; поэтому существует предел $\lim_{\rho \rightarrow 0} \gamma_\sigma(\Phi_m, \varepsilon, \rho)$, причем он на целое число отличается от деленного на 2π угла между векторами поля Ψ_0 в точках P и Q и, следовательно, на число, кратное половине, от деленного на 2π угла между векторами поля Ψ_0 в тех же точках. Последний угол при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к нулю; отсюда и вытекает существование предела (17.16), причем его значение, очевидно, будет числом, кратным половине.

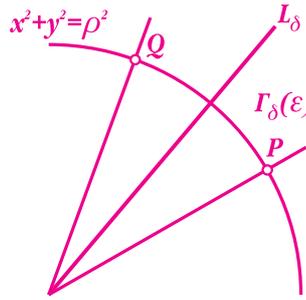


Рис. 17.2

Вращения $\gamma_\sigma(\Phi_m, \varepsilon, \rho)$ полей Φ_m при разных t и малых ρ мало отличаются друг от друга; поэтому число γ_σ , определяемое формулой (17.16), не зависит от t (конечно, при условии, что луч L_σ для полей с этими t неособый). Назовем *характеристикой* луча вырождения число γ_σ .

Теорема 17.1. Поле Φ_m будет невырожденным в том и только том случае, если для него будут неособыми все лучи вырождения поля Ψ_0 .

Индекс γ нулевой изолированной особой точки невырожденного поля Φ_m определяется равенством

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{2s}. \quad (17.17)$$

Доказательство. Первая часть теоремы вытекает из леммы 17.1 и определения неособого луча. Переходим к доказательству второй части теоремы.

Выберем числа $\varepsilon > 0$ и $\rho > 0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$|\gamma_\sigma - \gamma_\sigma(\Phi_m, \varepsilon, \rho)| < \frac{1}{8s} \quad (\sigma = 1, 2, \dots, 2s). \quad (17.18)$$

Обозначим через $\gamma_0(\Phi_m, \varepsilon, \rho)$ вращение поля Φ_m на части окружности S_ρ ($x^2 + y^2 = \rho^2$), лежащей в $\Pi(\varepsilon)$. В силу однородности поля Ψ_0 выполнено равенство $\gamma_0(\Psi_0, \varepsilon, \rho) = \gamma_0(\Psi_0, \varepsilon, 1)$; поэтому из леммы 17.1 вытекает, что при малых положительных ρ

$$|\gamma_0 - \gamma_0(\Phi_m, \varepsilon, \rho)| < \frac{1}{4}. \quad (17.19)$$

Из (17.18) и (17.19) вытекает, что

$$|\gamma - \gamma_0 - \gamma_1 - \dots - \gamma_{2s}| < \frac{1}{2},$$

откуда и следует формула (17.17).

Теорема доказана.

Для применения теоремы 17.1 необходимо знать, является ли луч вырождения L_σ неособым для некоторого поля Φ_m и, если он неособый, его характеристику γ_σ . В следующих пунктах будет указан один из способов исследования луча вырождения L_σ .

17.3. Лучи вырождения. Всюду ниже мы будем предполагать, что исследуемый луч вырождения L_σ совпадает с положительной полуосью ординат $x = 0$, $y \geq 0$. Это предположение не ограничивает общности, так как в противном случае можно произвести линейную замену переменных с ортогональной матрицей, переводящую луч L_σ в положительную полуось ординат. Преобразованное поле, очевидно, допускает представление, подобное (17.2); при этом, если луч L_σ был неособым для поля Φ_m , то он таким останется и после преобразования, а его характеристика сохранится. Можно луч L_σ совмещать и с другой координатной полуосью; для таких случаев в приводимые ниже рассуждения читатель легко внесет соответствующие изменения.

Обозначим через a_i^j , b_i^j коэффициенты при $x^i y^j$ в разложениях по степеням x , y функций $\phi^1(x, y)$ и $\phi^2(x, y)$ соответственно. Пусть

$$\begin{aligned} a_{m_0}(x, y) &= a_{m_0}^0 x^{m_0} + \dots + a_\mu^{m_0-\mu} x^\mu y^{m_0-\mu}, \\ b_{m_0}(x, y) &= b_{m_0}^0 x^{m_0} + \dots + b_\mu^{m_0-\mu} x^\mu y^{m_0-\mu}, \end{aligned} \quad (17.20)$$

где хотя бы одно из чисел $a_\mu^{m_0-\mu}$, $b_\mu^{m_0-\mu}$ отлично от нуля. Пусть, например, $a_\mu^{m_0-\mu} \neq 0$.

Так как $a_{m_0}(x, y)$ не обращается в нуль в точках множества $\Gamma_s(\varepsilon)$, не лежащих на луче L_σ , то имеет место неравенство

$$|a_{m_0}(x, y)| \geq \alpha |x|^\mu (x^2 + y^2)^{\frac{m_0-\mu}{2}} \quad (\alpha > 0, (x, y) \in \Gamma_\sigma(\varepsilon)). \quad (17.21)$$

Ниже в разложениях по степеням x , y функций $\phi^1(x, y)$ и $\phi^2(x, y)$ нас будут интересовать члены $a_i^j x^i y^j$, $b_i^j x^i y^j$, для которых $i < \mu$, $j > m_0 - \mu$. Весом r такого члена назовем число $\frac{j - m_0 + \mu}{\mu - i}$. Легко видеть, что $r > 1$. Суммы членов, имеющих вес r функций $\phi^1(x, y)$ и $\phi^2(x, y)$ обозначим соответственно через $c_r(x, y)$, $d_r(x, y)$.

В случае, если все многочлены $c_r(x, y)$, $d_r(x, y)$ при $r \leq \frac{M - m_0 + \mu}{\mu}$ равны тождественно нулю, поле (17.3) при $i \leq M$ обращается в нуль на луче L_σ . Отсюда вытекает

Теорема 17.2. Пусть при $r \leq \frac{M - m_0 + \mu}{\mu}$

$$c_r(x, y) \equiv d_r(x, y) \equiv 0. \quad (17.22)$$

Тогда поля (17.3) вырождены при всех $i \leq M$.

Рассмотрим теперь случай, когда для некоторого r_0 , $r_0 \leq \frac{M - m_0 + \mu}{\mu}$, все многочлены $c_r(x, y)$, $d_r(x, y)$ при $r < r_0$ равны тождественно нулю и хотя бы один из многочленов $c_{r_0}(x, y)$, $d_{r_0}(x, y)$ принимает ненулевые значения.

Обозначим через Ψ_σ векторное поле

$$\Psi_\sigma(x, y) = (\psi_\sigma^1(x, y), \psi_\sigma^2(x, y)), \quad (17.23)$$

где

$$\psi_\sigma^1(x, y) = a_\mu^{m_0 - \mu} x^\mu y^{m_0 - \mu} + c_{r_0}(x, y) \quad (17.24)$$

$$\psi_\sigma^2(x, y) = b_\mu^{m_0 - \mu} x^\mu y^{m_0 - \mu} + d_{r_0}(x, y).$$

Поле Ψ_σ обладает свойством обобщенной однородности

$$\Psi_\sigma(\lambda^{r_0} x, \lambda y) \equiv \lambda^{m_0 + \mu(r_0 - 1)} \Psi_\sigma(x, y). \quad (17.25)$$

В следующих пунктах мы покажем, что, вообще говоря, поле Ψ_σ определяет, будет ли луч вырождения L_σ неособым для некоторого поля (17.3) и его характеристику γ_σ .

17.4. Вспомогательные леммы. Обозначим через $R_\sigma(\eta)$ множество точек (см. рис. 17.3), удовлетворяющих условию

$$|x| \leq \eta y^{r_0}. \quad (17.26)$$

Покажем, что для некоторого числа $\eta_0 > 0$ при $\eta \geq \eta_0$ и малых положительных $x^2 + y^2$ выполняются неравенства

$$|a_{m_0}(x, y)| \geq \alpha_1 (x^2 + y^2)^{\frac{m_0 + \mu(r_0 - 1)}{2}} \quad (\alpha_1 > 0) \quad (17.27)$$

и

$$|\phi_m^1(x, y) - a_{m_0}(x, y)| < |a_{m_0}(x, y)| \quad (17.28)$$

для точек (x, y) из $\Gamma_\sigma(\varepsilon) \setminus R_\sigma(\eta)$.

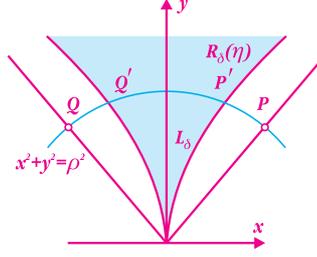


Рис. 17.3

Действительно, для любого η при $|x| \geq \eta y^{r_0}$ в силу (17.21) справедливо неравенство

$$|a_{m_0}(x, y)| \geq \alpha \eta^\mu y^{\mu r_0} (x^2 + y^2)^{\frac{m_0 - \mu}{2}}.$$

Так как для точек $\Gamma_\sigma(\varepsilon)$ справедливо неравенство $y \geq (1 - \sin \varepsilon)(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, то, полагая $\alpha_1 = \alpha(1 - \sin \varepsilon)^{\mu r_0} \eta^\mu$, получаем неравенство (17.27).

Переходим ко второму неравенству. Обозначим через $\chi_1(x, y)$ сумму членов в разложении $\phi_m^1(x, y)$ по степеням x, y , для которых $i + j > m_0$, $j \leq m_0 - \mu$; через $\chi_2(x, y)$ — сумму всех остальных членов, удовлетворяющих условию $i + j > m_0$. Для функции $\chi_1(x, y)$ имеем

$$\begin{aligned} |\chi_1(x, y)| &= \left| \sum a_i^j x^i y^j \right| \leq \left(\sum |a_i^j| |x|^{i-\mu} y^j \right) |x|^\mu \leq \\ &\leq \left(\sum |a_i^j| (\operatorname{tg} \varepsilon)^{i-\mu} (x^2 + y^2)^{\frac{i+j-\mu}{2}} \right) |x|^\mu = o \left(|x|^\mu (x^2 + y^2)^{\frac{m_0 - \mu}{2}} \right). \end{aligned} \quad (17.29)$$

Аналогично для функции $\chi_2(x, y)$ при $|x| \geq \eta y^{r_0}$ получаем

$$\begin{aligned} |\chi_2(x, y)| &= \left| \sum a_i^j x^i y^j \right| \leq \left(\sum |a_i^j| |x|^i y^{j-m_0+\mu} \right) y^{m_0-\mu} \leq \\ &\leq \left(\sum |a_i^j| \eta^{-\frac{j-m_0+\mu}{r_0}} |x|^{i+\frac{j-m_0+\mu}{r_0}} \right) y^{m_0-\mu}. \end{aligned}$$

Числа $i + \frac{j - m_0 + \mu}{r_0}$ для ненулевых a_i^j не меньше μ , так как в противном случае $\frac{j - m_0 + \mu}{\mu - i} < r_0$ и, следовательно, $a_i^j = 0$. Поэтому, полагая $\delta(\eta) = \left(\sum |a_i^j| \eta^{-\frac{j-m_0+\mu}{r_0}} \right)$, получаем

$$|\chi_2(x, y)| \leq \delta(\eta) |x|^\mu y^{m_0-\mu} \quad ((x, y) \notin R_\sigma(\eta)),$$

где $\delta(\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \infty$.

Выберем число η_0 так, чтобы при $(x, y) \notin \Gamma_\sigma(\varepsilon) \setminus R_\sigma(\eta_0)$ выполнялось неравенство

$$|\chi_2(x, y)| < |a_{m_0}(x, y)|. \quad (17.30)$$

Тогда из (17.21), (17.29), (17.30) и из того, что

$$|\phi_m^1(x, y) - a_{m_0}(x, y)| \leq |\chi_1(x, y)| + |\chi_2(x, y)|,$$

вытекает справедливость при указанных x, y неравенства (17.28).

В случае, если $t < t_0 + \mu(r_0 - 1)$, луч L_σ не может быть неособым для поля Φ_m , так как на нем поле Φ_m обращается в нуль. В случае же, если $t \geq t_0 + \mu(r_0 - 1)$, из неравенств (17.27) и (17.28) вытекает, что для некоторого $\rho > 0$ на множестве $\Gamma_\sigma(\varepsilon) \setminus R_\sigma(\eta)$ ($\eta \geq \eta_0$) при $x^2 + y^2 \leq \rho^2$ выполняется неравенство (17.15).

Таким образом, имеет место

Лемма 17.2. *Луч вырождения L_σ будет неособым для поля Φ_m в том и только в том случае, если $t \geq t_0 + \mu(r_0 - 1)$ и для некоторого $\rho > 0$ на множестве $R_\sigma(\eta)$ при $x^2 + y^2 \leq \rho^2$ выполняется неравенство (17.15).*

Рассмотрим теперь векторное поле Φ_m на множестве $R_\sigma(\eta)$ ($\eta \geq \eta_0$). Легко видеть, что на этом множестве справедливы оценки

$$|\phi_m^\tau(x, y) - \psi_\sigma^\tau(x, y)| = o(y^{m_0 + \mu(r_0 - 1)}) \quad (\tau = 1, 2). \quad (17.31)$$

Докажем, например, эту оценку для $\tau = 1$. При $|x| \leq \eta y^{r_0}$ имеем

$$|\phi_m^1(x, y) - \psi_\sigma^1(x, y)| \leq \sum |a_i^j| |x|^i |y|^j \leq \sum |a_i^j| \eta^i y^{r_0 i + j},$$

Но $r_0 i + j > m_0 + \mu(r_0 - 1)$; при $i \geq \mu$ это очевидно, а при $i < \mu$ вытекает из определения r_0 (в противном случае $\frac{j - m_0 + \mu}{\mu - 1} < r_0$ и $a_i^j = 0$). Отсюда и вытекает оценка (17.31).

Обозначим через $\gamma_\sigma^*(\Phi_m, \eta, \rho)$ вращение поля Φ_m на части окружности $S_\rho(x^2 + y^2 = \rho^2)$, лежащей в $R_\sigma(\eta)$.

Лемма 17.3. *Пусть луч вырождения L_σ неособый для поля Φ_m .*

Тогда его характеристика γ_σ может быть определена формулой

$$\gamma_\sigma = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \lim_{\rho \rightarrow 0} \gamma_\sigma^*(\Phi_m, \eta, \rho). \quad (17.32)$$

Доказательство. В силу (17.25) и (17.31) при $\rho \rightarrow 0$ векторы полей Φ_m и Ψ_σ в точках P' и Q' (см. рис. 17.3) стремятся совпасть по направлению. Так как поле Ψ_σ обладает свойством обобщенной однородности (17.25), то, повторяя рассуждения, приведенные в п. 17.2 для полей Φ_m и Ψ_σ , убедимся в существовании двойного предела в правой части равенства (17.32). Значение этого предела будет числом, кратным половине.

При малых ε сумма вращений поля Ψ_σ на дугах $\widehat{PP'}$ и $\widehat{Q'Q}$ меньше $\frac{1}{4}$. Так как в точках этих дуг при малых ρ и $\frac{1}{\eta}$ векторы полей Φ_m и Ψ_σ направлены почти одинаково, то сумма вращений поля Φ_m на дугах $\widehat{PP'}$ и $\widehat{Q'Q}$ меньше одной трети, то есть

$$|\gamma_\sigma(\Phi_m, \varepsilon, \rho) - \gamma_\sigma^*(\Phi_m, \eta, \rho)| < \frac{1}{3}.$$

Поэтому $\lim_{\rho \rightarrow 0} \gamma_\sigma(\Phi_m, \varepsilon, \rho)$ и $\lim_{\rho \rightarrow 0} \gamma_\sigma^*(\Phi_m, \eta, \rho)$ при малых ε и $\frac{1}{\eta}$ отличаются меньше чем на половину, откуда и вытекает равенство (17.32).

17.5. Исследование основного случая. В этом и следующем пунктах исследуется векторное поле Φ_m на множестве $R_\sigma(\eta)$.

Компоненты поля Ψ_σ обращаются в нуль по оси $y = 0$. Назовем поле Ψ_σ невырожденным в верхней полуплоскости, если оно при $y > 0$ не имеет особых точек. Оказывается, если поле Ψ_σ невырождено, то луч L_σ неособый для некоторого поля (17.3) и его характеристика γ_σ определяется этим полем. Этот случай мы и рассмотрим в настоящем пункте.

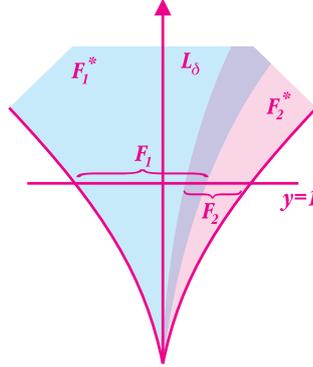


Рис. 17.4

Первая компонента поля Ψ_σ обращается в нуль на криволинейных лучах $x = ky^{r_0}$, где k — корень алгебраического уравнения $\psi_s^1(k, 1) = 0$. Аналогично вторая компонента поля Ψ_σ обращается в нуль на криволинейных лучах $x = ky^{r_0}$, где k — корень алгебраического уравнения $\psi_s^2(k, 1) = 0$. Поэтому для того, чтобы поле Ψ_σ было невырожденным в верхней полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы уравнения

$$\psi_s^1(k, 1) = 0, \quad \psi_s^2(k, 1) = 0 \quad (17.33)$$

не имели общих вещественных корней.

Пусть поле Ψ_σ невырождено в верхней полуплоскости. Отрезок прямой $y = 1$, лежащий в $R_\sigma(\eta)$ (см. рис. 17.4), можно покрыть двумя замкнутыми множествами F_1 и F_2 так, что

$$\min_{(x,y) \in F_1} |\phi_\sigma^1(x, y)| > 0, \quad \min_{(x,y) \in F_2} |\phi_\sigma^2(x, y)| > 0. \quad (17.34)$$

Обозначим через F_1^* множество точек, составленное из криволинейных лучей $x = ky^{r_0}$, проходящих через F_1 ; аналогично определим множество F_2^* . Множества F_1^* и F_2^* покрывают $R_\sigma(\eta)$. Из (17.34) вытекают оценки

$$|\psi_\sigma^\tau(x, y)| \geq \alpha y^{m_0 + \mu(r_0 - 1)} \quad ((x, y) \in F_\tau^*; \tau = 1, 2; \alpha > 0). \quad (17.35)$$

Из оценок (17.31) и (17.35) при малых $x^2 + y^2$ и $(x, y) \in R_\sigma(\eta)$ вытекает неравенство (17.15), если только $m \geq m_0 + \mu(r_0 - 1)$. Следовательно, луч вырождения L_σ неособый для поля Φ_m .

Переходим к вычислению характеристики γ_σ . При малых положительных ρ векторы полей Φ_m и Ψ_σ на части окружности S_ρ ($x^2 + y^2 = \rho^2$), лежащей в

$R_\sigma(\eta)$ ($\eta \geq \eta_0$), в силу (17.31) и (17.35) направлены не в противоположные стороны. В точках же P' и Q' (см. рис. 17.3) при $\rho \rightarrow 0$ векторы этих полей стремятся совпасть по направлению. Отсюда вытекает, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \gamma_\sigma^*(\Phi_m, \eta, \rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \gamma_\sigma^*(\Psi_\sigma, \eta, \rho)$$

и, следовательно,

$$\gamma_\sigma = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \lim_{\rho \rightarrow 0} \gamma_\sigma^*(\Psi_\sigma, \eta, \rho). \quad (17.36)$$

Пусть $d_\sigma(x, y)$ — общий наибольший делитель многочленов $\psi_\sigma^1(x, y)$ и $\psi_\sigma^2(x, y)$. Тогда

$$\Psi_\sigma(x, y) = \tilde{\Psi}_\sigma(x, y)d_\sigma(x, y), \quad (17.37)$$

где поле $\tilde{\Psi}_\sigma(x, y)$ обладает свойством обобщенной однородности и не имеет особых точек, отличных от нулевой при $y \geq 0$. Обозначим через $\gamma_{\sigma,0}$ вращение поля $\tilde{\Psi}_\sigma$ на полуокружности S_1^+ ($x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$). Так как $\gamma_\sigma^*(\Psi_\sigma, \eta, \rho) = \gamma_\sigma^*(\tilde{\Psi}_\sigma, \eta, \rho)$, то

$$\gamma_\sigma = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \gamma_\sigma^*(\Psi_\sigma, \eta, 1) = \gamma_{\sigma,0}. \quad (17.38)$$

Нами доказана

Теорема 17.3. Пусть поле Ψ_σ невырождено в верхней полуплоскости.

Тогда луч вырождения L_σ неособый для поля Φ_m при $m \geq m_0 + \mu(r_0 - 1)$ и его характеристика γ_σ определяется формулой

$$\gamma_\sigma = \gamma_{\sigma,0}. \quad (17.39)$$

Остановимся на одном способе вычисления вращения $\gamma_{\sigma,0}$ поля $\tilde{\Psi}_\sigma$. Рассмотрим, например, случай $a_\mu^{m_0 - \mu} \neq 0$. Пусть

$$U_0(k), U_1(k), \dots, U_{l(\sigma)}(k) \quad (17.40)$$

— обобщенный ряд Штурма многочленов $U_0(k) = \psi_\sigma(k, 1)$ и $U_1(k) = \psi_\sigma^2(k, 1)$; пусть $s(k_0)$ — число перемен знака в ряде (17.40) при $k = k_0$. Тогда (см. п. 8.7)

$$\gamma_{\sigma,0} = \frac{s(-\infty) - s(+\infty)}{2}. \quad (17.41)$$

Аналогично можно рассмотреть случай, когда $b_\mu^{m_0 - \mu} \neq 0$.

17.6. Исследование случаев вырождения. Перейдем к случаю, когда поле Ψ_σ вырождено в верхней полуплоскости, то есть многочлены $\psi_\sigma^1(k, 1)$, $\psi_\sigma^2(k, 1)$ имеют один или несколько общих вещественных корней.

Пусть $r_0 = \frac{p}{q}$, где p и q — целые взаимно простые числа; очевидно, $p > q$. Произведём замену переменных:

$$x = |u|^p \text{sign } u, \quad y = |v|^q \text{sign } v. \quad (17.42)$$

Рассмотрим на множестве $\tilde{R}_\sigma(\eta)$, выделенном неравенством

$$|u| \leq \eta^{\frac{1}{p}} v \quad (17.43)$$

и соответствующем множеству $R_\sigma(\eta)$, векторное поле

$$\tilde{\Phi}(u, v) = \Phi(|u|^p \text{sign } u, |v|^q \text{sign } v). \quad (17.44)$$

Компоненты $\tilde{\phi}^1(u, v)$, $\tilde{\phi}_2^1(u, v)$ этого поля будут иметь вид

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^1(u, v) &= \tilde{a}_1(u, v) + \dots + \tilde{a}_{Mq}(u, v) + \tilde{\omega}^1(u, v), \\ \tilde{\phi}^2(u, v) &= \tilde{b}_1(u, v) + \dots + \tilde{b}_{Mq}(u, v) + \tilde{\omega}^2(u, v). \end{aligned} \quad (17.45)$$

где через $\tilde{a}_i(u, v)$, $\tilde{b}_i(u, v)$ обозначены положительно однородные функции порядка i :

$$\tilde{a}_i(\lambda u, \lambda v) \equiv \lambda^i \tilde{a}_i(u, v), \quad \tilde{b}_i(\lambda u, \lambda v) \equiv \lambda^i \tilde{b}_i(u, v) \quad (\lambda \geq 0),$$

а функции $\tilde{\omega}^1(u, v)$, $\tilde{\omega}^2(u, v)$ являются бесконечно малыми более высокого, чем $(u^2 + v^2)^{\frac{Mq}{2}}$, порядка.

Обозначим через $\tilde{\Phi}_i$ векторное поле

$$\tilde{\Phi}_i(u, v) = (\tilde{\phi}_i^1(u, v), \tilde{\phi}_i^2(u, v)), \quad (17.46)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_i^1(u, v) &= \tilde{a}_1(u, v) + \dots + \tilde{a}_i(u, v), \\ \tilde{\phi}_i^2(u, v) &= \tilde{b}_1(u, v) + \dots + \tilde{b}_i(u, v). \end{aligned}$$

Из (17.42) вытекает, что при $(x, y) \in R_\sigma(\eta)$ и малых $x^2 + y^2$ справедливы неравенства

$$c_1(u^2 + v^2)^q \leq x^2 + y^2 \leq (u^2 + v^2)^q \quad (c_1 > 0). \quad (17.47)$$

Поэтому луч вырождения L_σ будет неособым для поля Φ_m в том и только том случае, если для любого $\eta \geq \eta_0$ существуют числа $\rho > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что при $u^2 + v^2 \leq \rho^2$, $(u, v) \in \tilde{R}_\sigma(\eta)$ выполняется неравенство

$$\|\tilde{\Phi}_{mq}(u, v)\| \geq \alpha(u^2 + v^2)^{\frac{mq}{2}}. \quad (17.48)$$

Неравенство (17.48) для поля $\tilde{\Phi}_{mq}$ аналогично неравенству (17.15) для поля Φ_m .

Пусть луч L_σ неособый для поля Φ_m . При малых положительных $u^2 + v^2$ векторы поля $\tilde{\Phi}_{mq}$ в $\tilde{R}_\sigma(\eta)$ отличны от нуля и, значит, определено вращение $\tilde{\gamma}_\sigma(\tilde{\Phi}_{mq}, \eta, \rho)$ этого поля на дугах окружностей S_ρ ($u^2 + v^2 = \rho^2$), лежащих в $\tilde{R}_\sigma(\eta)$. Из (17.42) вытекает, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \tilde{\gamma}_\sigma(\tilde{\Phi}_{mq}, \eta, \rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \gamma_\sigma^*(\Phi_m, \eta, \rho). \quad (17.49)$$

Действительно, вращение $\tilde{\gamma}_\sigma(\tilde{\Phi}_{mq}, \eta, \rho)$ (см. рис. 17.5) равно вращению поля Φ_m на дуге кривой $|x|^{\frac{2}{p}} + |y|^{\frac{2}{q}} = \rho^2$, лежащей в $R_\sigma(\eta)$. Через точки P'' и Q'' проведем

окружность S_{ρ_1} ($x^2 + y^2 = \rho_1^2$). Тогда $\tilde{\gamma}_\sigma(\tilde{\Phi}_{mq}, \eta, \rho) = \gamma_\sigma^*(\Phi_m, \eta, \rho_1)$. Но из $\rho \rightarrow 0$ следует, что $\rho_1 \rightarrow 0$, откуда и вытекает равенство (17.49).

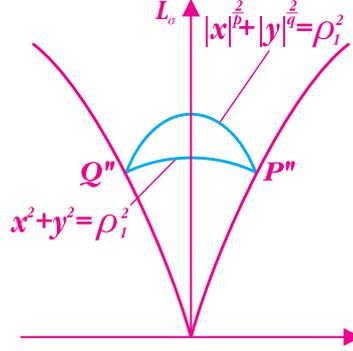


Рис. 17.5

Из (17.49) следует, что имеет место формула

$$\gamma_\sigma = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \lim_{\rho \rightarrow 0} \tilde{\gamma}_\sigma(\tilde{\Phi}_{mq}, \eta, \rho). \quad (17.50)$$

В случае, если p или q четно, компоненты поля (17.44) не допускают представления вида (17.2): функции $\tilde{a}_i(u, v)$, $\tilde{b}_i(u, v)$ будут однородными “многочленами” степени r , коэффициенты которых будут содержать $\text{sign } u$ (если p четно) или $\text{sign } v$ (если q четно). Однако нетрудно видеть, что все проведенные выше в этом параграфе рассуждения сохраняют силу.

Из соотношений (17.31), записанных в координатах (u, v) , вытекает, что

$$\tilde{a}_1(u, v) \equiv \dots \equiv \tilde{a}_{m_0q+\mu(p-q)-1}(u, v) \equiv 0, \quad (17.51)$$

$$\tilde{a}_{m_0q+\mu(p-q)}(u, v) \equiv \psi_\sigma^1(|u|^p \text{sign } u, |v|^q \text{sign } v)$$

и

$$\tilde{b}_1(u, v) \equiv \dots \equiv \tilde{b}_{m_0q+\mu(p-q)-1}(u, v) \equiv 0, \quad (17.52)$$

$$\tilde{b}_{m_0q+\mu(p-q)}(u, v) \equiv \psi_\sigma^2(|u|^p \text{sign } u, |v|^q \text{sign } v)$$

Рассмотрим векторное поле

$$\tilde{\Psi}_\sigma(u, v) = \tilde{\Phi}_{m_0q+\mu(p-q)}(u, v) = (\tilde{a}_{m_0q+\mu(p-q)}(u, v), \tilde{b}_{m_0q+\mu(p-q)}(u, v)). \quad (17.53)$$

Вырожденность в верхней полуплоскости поля $\tilde{\Psi}_\sigma$ означает, что компоненты поля $\tilde{\Psi}_\sigma$ обращаются в нуль на нескольких лучах

$$L_{\sigma,1} (u = k_1 v (v \geq 0)), \dots, L_{\sigma,s(\sigma)} (u = k_{s(\sigma)} v (v \geq 0)), \quad (17.54)$$

где $k_1, \dots, k_{s(\sigma)}$ — общие вещественные корни уравнений

$$\tilde{a}_{m_0q+\mu(p-q)}(k, 1) = 0, \quad \tilde{b}_{m_0q+\mu(p-q)}(k, 1) = 0 \quad (17.55)$$

(число этих корней равно числу криволинейных лучей, на которых поле Ψ_σ обращается в нуль). Лучи (17.54) будем называть *лучами вырождения* поля $\tilde{\Psi}_\sigma$.

Луч вырождения $L_{\sigma, \kappa}$ называется *неособым* для поля $\tilde{\Phi}_i$, если при малых $u^2 + v^2$ и (u, v) для достаточно малого угла с вершиной в нулевой точке, биссектрисой которого является луч $L_{\sigma, \kappa}$ выполняется неравенство (17.48). Если луч $L_{\sigma, \kappa}$ неособый для поля $\tilde{\Phi}_i$, то его характеристика $\gamma_{\sigma, \kappa}$ определяется формулой, аналогичной (17.16). Справедлива

Теорема 17.4. *Для того чтобы луч вырождения L_σ был неособым для поля $\tilde{\Phi}_m$, необходимо и достаточно, чтобы все лучи вырождения (17.54) были неособыми для поля $\tilde{\Phi}_{mq}$.*

Характеристика γ_σ неособого луча вырождения определяется формулой

$$\gamma_\sigma = \gamma_{\sigma, 0} + \gamma_{\sigma, 1} + \dots + \gamma_{\sigma, s(\sigma)}. \quad (17.56)$$

К лучам вырождения (17.54) можно снова применить описанную выше схему и т.д.

Допустим, что поле $\tilde{\Phi}_m$ невырождено. Тогда после конечного числа переходов от полей Φ к полям $\tilde{\Phi}$ теоремы 17.4 и 17.3 позволяют установить, что каждый луч вырождения L_σ неособый для поля $\tilde{\Phi}_m$, и вычислить его характеристику γ_σ .

Этот факт поясним следующими соображениями. Если бы оказалось, что при помощи алгоритма нельзя выяснить, будет ли некоторый луч вырождения L_σ неособым, то тем самым была бы построена бесконечная последовательность $L^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$) лучей вырождения последовательно конструируемых полей. Уравнение луча $L^{(n)}$ в координатах (x, y) будет иметь вид

$$x = \sum_j c_j^{(n)} y^{\alpha_j} \quad (\alpha_j < \alpha_{j+1}), \quad (17.57)$$

причем в этих выражениях при увеличении n увеличивается число совпадающих первых членов. Тем самым выражения (17.57) определяют некоторый ряд по дробным степеням y . Оказывается, этот ряд совпадает с одним из рядов, получаемых при помощи диаграммы Ньютона, применяемой к многочленам $\phi_m^1(x, y), \phi_m^2(x, y)$. По известной теореме⁵⁰ этот ряд будет сходящимся и определит общее решение уравнений $\phi_m^1(x, y) = 0, \phi_m^2(x, y) = 0$, что противоречит невырожденности поля $\tilde{\Phi}_m$.

17.7. Пример. Приведем краткую схему алгоритма.

1) По заданному полю Φ определяется поле Ψ_0 .

Если поле Ψ_0 невырождено, то нулевая особая точка поля Φ изолирована и ее индекс γ равен вращению поля Ψ_0 на единичной окружности. Для вычисления этого вращения нужно пользоваться методами, изложенными в § 8.

2) Если поле Ψ_0 вырождено, то конструируем невырожденное поле $\tilde{\Psi}_0$ и ищем лучи вырождения L_σ (см. п. 17.2).

⁵⁰См., например, **Н.Г. Чеботарев**, *Теория алгебраических функций*, § 38, ГТТИ, 1948: **СМБ**, *Математический анализ (дифференцирование и интегрирование)*, Физматгиз, 1961.

Находим вращение γ_0 поля $\tilde{\Psi}_0$ на единичной окружности и переходим к исследованию каждого луча вырождения L_σ .

3) Если выполнены условия теоремы 17.2, то по полю Φ_M невозможно определить, будет ли нулевая особая точка поля Φ изолированной.

4) Если при построении поля Ψ_σ окажется, что оно невырождено в соответствующей полуплоскости, то луч L_σ неособый. Характеристика γ_σ этого луча вырождения вычисляется как вращение поля $\tilde{\Psi}_\sigma$ на соответствующей единичной полуокружности.

5) Если все лучи вырождения L_σ окажутся неособыми и будут вычислены их характеристики γ_σ , то нулевая особая точка поля Φ будет изолированной и ее индекс определится формулой

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{2s}. \quad (17.17)$$

6) Если поле Ψ_σ окажется вырожденным в соответствующей полуплоскости, то определяются числа p и q и производится замена (17.42). По полю $\tilde{\Phi}$ определяется поле $\tilde{\Psi}_\sigma$, число $\gamma_{\sigma,0}$ и ищутся лучи вырождения $L_{\sigma,\kappa}$.

Каждый луч вырождения $L_{\sigma,\kappa}$ исследуется тем же методом, который применялся для исследования луча вырождения L_σ . Если лучи вырождения $L_{\sigma,\kappa}$ окажутся неособыми и будут найдены их характеристики $\gamma_{\sigma,\kappa}$, то луч вырождения L_σ также будет неособым и его характеристика γ_σ определится равенством

$$\gamma_\sigma = \gamma_{\sigma,0} + \gamma_{\sigma,1} + \dots + \gamma_{\sigma,s(\sigma)}. \quad (17.56)$$

7) Может оказаться, что для исследования некоторых лучей вырождения L_σ , придется переходить к вспомогательным полям несколько раз. Тогда и формула (17.56) применяется последовательно несколько раз.

Применим описанный алгоритм к векторному полю

$$\Phi(x, y) = (x^2y + x^4 - x^2y^2 + y^4, x^4 - x^5 - y^5 + x^3y^3). \quad (17.58)$$

В нашем случае $m_0 = 3$; поле Ψ_0 имеет вид

$$\Psi_0(x, y) = (x^2y, 0).$$

Это поле вырождено: его компоненты обращаются в нуль на четырех лучах

$$L_1 (y = 0 (x \geq 0)); \quad L_1 (y = 0 (x \leq 0));$$

$$L_1 (x = 0 (y \geq 0)); \quad L_1 (x = 0 (y \leq 0)).$$

Число γ_0 равно нулю, так как $\tilde{\Psi}_0(x, y) = (1, 0)$.

Лучи L_1 и L_2 будем исследовать вместе. Нетрудно видеть, что $\mu = 1$, $r_0 = 2$,

$$c_{r_0}(x, y) = x^4, \quad d_{r_0}(x, y) = x^4.$$

Так как поле

$$(x^2y + x^4, x^4)$$

невырождено, то лучи L_1 и L_2 неособые. Их характеристики γ_1 и γ_2 равны соответственно $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$.

Рассмотрим теперь лучи L_3 и L_4 . Очевидно, $\mu = 2$, $r_0 = \frac{3}{2}$ и

$$c_{r_0}(x, y) = y^4, \quad d_{r_0}(x, y) = 0.$$

Поле

$$(x^2y + y^4, 0)$$

невырождено в полуплоскости $y \geq 0$ и вырождено в полуплоскости $y \leq 0$; его компоненты обращаются в нуль на криволинейных случаях $x = y^{\frac{3}{2}}$ ($y \leq 0$) и $x = -|y|^{\frac{3}{2}}$ ($y \leq 0$).

Отсюда вытекает, что луч L_3 неособый и его характеристика γ_3 равна нулю.

Для исследования луча L_4 произведем замену переменных (17.42) ($p = 3, q = 2$):

$$x = u^3, \quad y = v^2 \text{sign } v.$$

Выпишем компоненты поля $\tilde{\Phi}$:

$$\tilde{\Phi}(u, v) = (u^6 v^2 \text{sign } v + v^8 - u^6 v^4 + u^{12}, -v^{10} \text{sign } v + u^{12} - u^{15} + u^9 v^6 \text{sign } v).$$

Поле $\tilde{\Psi}_\sigma$, соответствующее лучу L_4 запишется в виде

$$\tilde{\Psi}_\sigma(u, v) = (u^6 v^2 \text{sign } v + v^8, 0);$$

компоненты этого поля обращаются в нуль на двух лучах, отличных от оси $v = 0$:

$$L_{4,1} (u = v (v \leq 0)); \quad L_{4,2} (u = -v (v \leq 0)).$$

Произведем замену переменных

$$u = \frac{-\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{-\xi - \eta}{\sqrt{2}}.$$

Поле $\tilde{\Phi}$ при $v \leq 0$ примет вид

$$\tilde{\Phi}(u, v) = \left(\frac{-(\xi - \eta)^6 (\xi + \eta)^2 + (\xi + \eta)^8}{16} - \frac{(\xi - \eta)^6 (\xi + \eta)^4}{32} + \frac{(\xi - \eta)^{12}}{64}, \right. \\ \left. \frac{(\xi + \eta)^{10}}{32} + \frac{(\xi - \eta)^{12}}{64} + \frac{(\xi - \eta)^{15} + (\xi - \eta)^9 (\xi + \eta)^6}{128\sqrt{2}} \right). \quad (17.59)$$

В переменных ξ, η луч $L_{4,1}$ совпадает с положительной полуосью абсцисс $\eta = 0$, $\xi \geq 0$; луч $L_{4,2}$ с положительной полуосью ординат $\xi = 0$, $\eta \geq 0$.

Из (17.59) нетрудно видеть, что для обеих лучей $\mu = 1$, $r_0 = 3$, причем

$$c_{r_0}(\xi, \eta) = -\frac{\eta^{10}}{32}, \quad d_{r_0}(\xi, \eta) = \frac{\eta^{10}}{32}$$

для луча $L_{4,1}$ и

$$c_{r_0}(\xi, \eta) = -\frac{\xi^{10}}{32}, \quad d_{r_0}(\xi, \eta) = \frac{\xi^{10}}{32}$$

для луча $L_{4,2}$. Поля

$$\left(\frac{1}{4}\xi\eta^7 - \frac{1}{32}\eta^{10}, \frac{1}{32}\eta^{10} \right), \quad \left(\frac{1}{4}\xi^7\eta - \frac{1}{32}\xi^{10}, \frac{1}{32}\xi^{10} \right)$$

невырождены; поэтому лучи $L_{4,1}$, $L_{4,2}$ неособые. Их характеристики $\gamma_{4,1}$ и $\gamma_{4,2}$ равны $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ соответственно. Отсюда вытекает, что луч L_4 неособый. Так как $\gamma_{4,0} = 0$, то его характеристика $\gamma_4 = 0$ равна нулю.

Таким образом, все лучи вырождения поля Ψ_0 неособые; следовательно, нулевая особая точка поля (17.58) изолирована и ее индекс γ равен нулю.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] П.С. Александров. *Введение в общую теорию множеств и функций*, Гостехиздат, 1948.
- [2] П.С. Александров. *Комбинаторная топология*, Гостехиздат, 1950.
- [3] А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. *Теория колебаний*, Физматгиз, 1959.
- [4] Дж. Биркгоф, *Динамические системы*, М.-Л. 1941.
- [5] Ф.Д. Гахов. *Краевые задачи* (Физматгиз, 1963).
- [6] Ф.Д. Гахов, Ю.М. Крикунов. *Топологические методы теории функций комплексного переменного и их приложения к обратным краевым задачам*, Изв. АН СССР, серия матем., **20** (1956).
- [7] Д.А. Граве. *Элементы высшей алгебры*, Киев, 1911.
- [8] Э. Гурса. *Курсе математического анализа*, т. 1, ОНТИ, 1936.
- [9] П.П. Забрейко. *О вычислении индекса Пуанкаре*, ДАН СССР, **145** (1962), №5.
- [10] Э. Камке. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Физматгиз, 1961.
- [11] Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, 1958.
- [12] М.А. Красносельский. *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*, Гостехиздат, 1956.
- [13] М.А. Красносельский, А.И. Перов. *Дифференциальные и интегральные неравенства*, статья в справочнике *Обыкновенные дифференциальные уравнения*.
- [14] М.А. Красносельский, А.И. Перов, *О существовании решений у некоторых нелинейных операторных уравнений*, ДАН СССР **126** (1959), №1.
- [15] М.А. Красносельский, А.И. Перов. ДАН СССР **123** (1958), №2.
- [16] А.Г. Курош. *Курс высшей алгебры*, Физматгиз, 1963.
- [17] С. Лефшец. *Геометрическая теория дифференциальных уравнений*, ИЛ, Москва, 1961.
- [18] М. Морс. *Топологические методы в теории функций комплексного переменного*, ИЛ, 1955.
- [19] В.В. Немыцкий, В.В. Степанов. *Качественная теория дифференциальных уравнений*, М.-Л., 1949.

- [20] **А.И. Перов.** *Об одном обобщении теоремы Роля*, Труды семинара по функциональному анализу (Воронежский ун-т), вып. **6**, 1958.
- [21] **А.И. Перов.** *Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений*, диссертация, Воронежский государственный университет, 1959.
- [22] **А.И. Перов.** *О двухточечной краевой задаче*, ДАН СССР **122** (1958), №6.
- [23] **А.И. Перов.** *О краевой задаче для системы двух дифференциальных уравнений*, ДАН СССР **144** (1962), №3.
- [24] **И.Г. Петровский.** *Лекции об уравнениях с частными производными*, Физматгиз, 1961.
- [25] **А.И. Поволоцкий.** *Определение углового порядка локально простой кривой*, ДАН СССР **124**, №3, 1959.
- [26] **А.И. Поволоцкий.**
- [27] **А.И. Поволоцкий.** *Индексы особых точек псевдоаналитических функций*, ДАН СССР **129**, №2 (1959).
- [28] **Дж. Сансоне.** *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, т. 1. ИЛ, 1954.
- [29] **Дж. Сансоне.** *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, т. 2, ИЛ, 1954.
- [30] **И.Б. Симоненко.** ДАН **135** (1960), №3.
- [31] **СМБ,** *Математический анализ (Дифференцирование и интегрирование)*, Физматгиз, 1961.
- [32] **В.В. Степанов.** *Курс дифференциальных уравнений*, Физматгиз, 1959.
- [33] **Ф. Трикоми.** *Дифференциальные уравнения*, ИЛ, 1962.
- [34] **Г.М. Фихтенгольц.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 1 (1959).
- [35] **Masuo Hukuhara,** Sur une generalisation d'un th?or?me de Kneser Proc. Japan. Acad. **29** (1953), 154.
- [36] **Н.Г. Чеботарев,** *Теория алгебраических функций*, Мю.: ГГТИ, 1948.
- [37] **Н.Г. Чеботарев, Н.Н. Мейман.** *Проблема Рауса – Гурвица для полиномов и целых функций*, Труды Матем. института им. В. А. Стеклова АН СССР, **26** (1949).
- [38] **П.Т. Черевичный.** (см., например, Научные записки Одесского политехнического института, тома **23, 24, 31**, 1960, 1961 гг.)

Марк Александрович Красносельский,
Анатолий Иванович Перов,
Абрам Исаакович Поволоцкий,
Петр Петрович Забрейко.
Векторные поля на плоскости

М., Физматгиз, 1963 г., 248 стр. с илл.

Редактор М.М. Горячая
Техн. редактор И.Ш. Аксельрод
Корректор Т.С. Плетнева

Сдано в набор 6/IV 1963 г. Подписано к печати 4/VII 1963 г.
Бумага $84 \times 108 \frac{1}{32}$. Физ. печ. л. 7,75 Условн. печ. л. 12,71.
Уч.-изд. л. 13,32. Тираж 11 000 экз. Т-08819. Цена книги 82 коп. Заказ №1312.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15,

Типография №2 им. Евг. Соколовой
УЦБ и ПП Ленсовнархоза
Ленинград, Измайловский пр., 29.

Отпечатано с готовых матриц во 2-ой тип. Трансжелдориздата МПС
Ленинград, ул. Правды, д. 15. Заказ 1400.